



Title	リーマン面に関連する位相幾何学 予稿集
Author(s)	河澄, 響矢
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 51, 1
Issue Date	1997-01-01
DOI	10.14943/751
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/752 ; http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/1234/
Type	bulletin (article)
Note	1997年9月16日～9月19日 於：北海道大学理学部数学教室 予稿集
File Information	51.pdf



[Instructions for use](#)

リーマン面に関連する位相幾何学

1997年9月16日～9月19日

於：北海道大学理学部数学教室

予稿集

Series #51. September, 1997

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- # 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.
- # 20: R. Agemi (Ed.), 第 15 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.
- # 21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.
- # 22: R. Agemi (Ed.), 第 16 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.
- # 23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1991 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.
- # 24: K. Kubota (Ed.), 第 17 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 29 pages. 1992.
- # 25: K. Takasaki, “非線型可積分系の数理” 1992.9.28~10.2 北海道大学での集中講義 講義録, 52 pages. 1993.
- # 26: T. Nakazi (Ed.), 第 1 回関数空間セミナー報告集, 93 pages. 1993.
- # 27: K. Kubota (Ed.), 第 18 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 40 pages. 1993.
- # 28: T. Hibi (Ed.), 1992 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 108 pages. 1993.
- # 29: I. Sawashima, T. Nakazi (Eds.), 第 2 回関数空間セミナー報告集, 79 pages. 1994.
- # 30: Y. Giga, Y.-G. Chen, 動く曲面を追いかけて, 講義録, 62 pages. 1994.
- # 31: K. Kubota (Ed.), 第 19 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 33 pages. 1994.
- # 32: T. Ozawa (Ed.), 1993 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 113 pages. 1994.
- # 33: Y. Okabe (Ed.), The First Sapporo Symposium on Complex Systems, 24 pages. 1994.
- # 34: A. Arai, Infinite Dimensional Analysis on an Exterior Bundle and Supersymmetric Quantum Field Theory, 10 pages. 1994.
- # 35: S. Miyajima, T. Nakazi (Eds.), 第 3 回関数空間セミナー報告集, 104 pages. 1995.
- # 36: N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 63 pages. 1995.
- # 37: I. Tsuda (Ed.), The Second & Third Sapporo Symposium on Complex Systems, 190 pages. 1995.
- # 38: M. Saito (Ed.), 1994 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 100 pages. 1995.
- # 39: S. Izumiya (Ed.), 接触幾何学と関連分野研究集会報告集, 186 pages. 1995.
- # 40: H. Komatsu, A. Kishimoto (Eds.), 作用素論・作用素環論研究集会予稿集, 61 pages. 1995.
- # 41: K. Okubo, T. Nakazi (Eds.), 第 4 回関数空間セミナー報告集, 103 pages. 1996.
- # 42: R. Agemi (Ed.), 第 20 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 47 pages. 1996.
- # 43: R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa(Eds.), Nonlinear Waves, Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute Vol I, 269 pages. 1996.
- # 44: R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa(Eds.), Nonlinear Waves, Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute Vol II, 270 pages. 1996.
- # 45: G. Ishikawa (Ed.), 1995 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 98 pages. 1996.
- # 46: R. Agemi (Ed.), 第 21 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 34 pages. 1996.
- # 47: N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関する位相幾何学, 61 pages. 1996.
- # 48: S. Miyajima, J. Inoue (Eds.), 第 5 回関数空間セミナー報告集, 90 pages. 1997.
- # 49: T. Ozawa (Ed.), Proceedings of the 22nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 67 pages. 1997.
- # 50: H.-F. Yamada (Ed.), 1996 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 99 pages. 1997.

リーマン面に関連する位相幾何学

1997年 9月16日～19日

於：北海道大学理学部数学教室

予稿集

はじめに

この予稿集は、平成9年度科学研究費基盤研究A「位相幾何学の総合的研究」（課題番号 08304006、代表者：森田茂之先生（東大数理））の補助により1997年9月16日から19日まで北海道大学理学部数学教室で行われる研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」に際し、予め各講演者からあつめた原稿をそのまま印刷したものである。

その目的は、参加者が講演への理解を深め、より活発な研究討論を行う一助とするとともに、記録として残すことによって後々の研究に役立てることにある。

この研究集会の開催は、森田先生はじめ多くの方々のご理解ご協力、さらに北海道大学理学部数学教室各位のご支援の上に成り立っていることを付記させていただく。

1997年8月

河澄響矢（北大理）

目次

配列は 50 音順による。

伊澤 毅 (北大理)	
Chern number formula for ramified coverings	1
遠藤 久顕 (阪大理)	
符号数が 0 でない曲面上の曲面束の一構成法	4
大場 清、橋本 義武 (お茶の水大理、阪市大理)	
井桁にまつわるエトセトラ	7
岡井 孝行	
Hyperbolic 4g-gons and $\mathrm{PSU}(1, 1)$ -representations of surface groups	11
奥村 善英 (金沢大工)	
タイヒミュラー空間の座標付けとその応用	20
笠原 泰 (高知工科大)	
種数 2 の Jones 表現の指数展開と Torelli 群の降中心列	44
鎌田 聖一 (阪市大理)	
量子逆元とブレイドモノドロミー	45
小松 信 (京大数理研)	
種数 2 の曲線族から得られる周期写像	53
小森 洋平 (阪市大理)	
タイヒミュラー空間のアーベル埋め込みとプリーツ座標について (C.Series との共同研究)	61
須川 敏幸 (京大理)	
Spectra of open Riemann surfaces	73

中居 功 (北大理)	
WEB 幾何学: なぜ (Double) Translation 面 からリーマン 面がでてくるか?	77
中村 博昭 (東大数理)	
Grothendieck-Teichmueller 群のある精密化	91
葉広 和夫 (東大数理)	
Groups of homology cobordisms of surfaces	93
廣瀬 進 (佐賀大理工)	
3次元ハンドル体の写像類群について	95
松本 幸夫 (東大数理)	
点抜き球面の写像類群と「量子逆元」	99
皆川 宏之 (北大理)	
Genus one surfaces of section of Anosov flows	107
森田 茂之 (東大数理)	
写像類群の構造をめぐるいくつかの予想と夢	111
森藤 孝之 (東大数理)	
種数2の写像類群とsignature cocycle, η -不変量	113
森吉 仁志 (北大理)	
曲面束の指数と写像類群の中心拡大	115

Chern number formula for ramified coverings

Takeshi Izawa

Department of Mathematics Faculty of Science
Hokkaido University, Sapporo 060, Japan

September 19th, 1997

Contents: 1. Statement of the main result.
2. Applications.
3. Idea of proof.

1. Let $f: Y \longrightarrow X$ be a ramified covering between n -dimensional compact complex manifolds with covering multiplicity μ . Let $R_f = \sum_i r_i R_i$ be the ramification divisor of f , and $B_f = \sum_i b_i B_i$ be the branch locus of f . We assume that the ramification divisor and any irreducible components of the branch locus are all non-singular. The main result is ($n = \sum_{i=1}^n i \cdot N_i$):

$$\begin{aligned} & (c_1^{N_1} \cdots c_n^{N_n})(Y) - \mu \cdot (c_1^{N_1} \cdots c_n^{N_n})(X) \\ &= \sum_i \left(H_{TR_i}(c_1(L_{R_i})) \cap [R_i] - \frac{b_i(r_i + 1)}{r_i} H_{TB_i}(c_1(L_{B_i})) \cap [B_i] \right) \\ &= \sum_i \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{b_i(1 - (r_i + 1)^{\alpha+1})}{r_i(r_i + 1)^\alpha} P_\alpha(c_1(B_i) \cdots c_{n-1}(B_i)) \cdot c_1(L_B)^\alpha \cap [B_i] \end{aligned}$$

where we set formally

$$H_\xi(l) = l^{-1} \cdot \left(\left(\prod_{i=1}^n (c_i(\xi) + c_{i-1}(\xi) \cdot l)^{N_i} \right) - c_1^{N_1} \cdots c_n^{N_n}(\xi) \right) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} P_\alpha(c_1 \cdots c_{n-1}) l^\alpha,$$

P_α is the coefficient of l^α of $H(l)$ as a polynomial in l .

2. We give some applications of our formula for particular cases. The result for the top Chern class implies the generalized Riemann-Hurwitz formula

$$\chi(Y) - \mu \cdot \chi(X) = - \sum_i b_i \cdot \chi(B_i),$$

which is the special case of the formula proved by Y.Yomdin, [Y].

In case that ($\mathbf{n} = \mathbf{2}$): (see [Iv].)

$$\begin{aligned} c_2(TY) \cap [Y] - \mu \cdot c_2(TX) \cap [X] &= - \sum_i b_i \cdot \chi(B_i), \\ c_1(TY)^2 \cap [Y] - \mu \cdot c_1(TX)^2 \cap [X] &= - \sum_i \left(2b_i \cdot \chi(B_i) + \frac{b_i(r_i + 2)}{r_i + 1} B_i \cdot B_i \right). \end{aligned}$$

Now from the fact that the signature of the surface is expressed by $L_1 = (1/3)p_1 = \frac{1}{3}(-2c_2 + c_1^2)$, (The calculation for T and L-genus is found in [Hz1]), we have

Theorem [Hirzebruch formula for signature for ramified coverings]

Let $f: Y \longrightarrow X$ be a ramified covering between compact complex analytic surfaces with covering multiplicity μ , $R_f = \sum_i r_i R_i$ the ramification divisor of f , and $B_f = \sum_i b_i B_i$ the branch locus of f . We assume that ramification divisor and irreducible components B_i of the branch locus B_f are all non-singular. Then

$$\begin{aligned} \text{Sign}(Y) - \mu \cdot \text{Sign}(X) &= \frac{1}{3}(p_1(Y) - \mu \cdot p_1(X)) \\ &= \frac{1}{3}\{(c_1(Y)^2 - \mu \cdot c_1(X)^2) - 2(c_2(Y) - \mu \cdot c_2(X))\} \\ &= - \sum_i \frac{b_i(r_i + 2)}{3(r_i + 1)} B_i \cdot B_i. \end{aligned}$$

We can also deduce the formula for the Todd genus, which is $\frac{1}{12}(c_2 + c_1^2)$:

Corollary Under the same assumption of the above theorem

$$\begin{aligned} T(Y) - \mu \cdot T(X) &= \frac{1}{12}\{(c_2(Y) - \mu \cdot c_2(X)) + (c_1(Y)^2 - \mu \cdot c_1(X)^2)\} \\ &= - \sum_i \left(\frac{b_i}{2} T_1(B_i) + \frac{b_i((r_i + 1)^2 - 1)}{12r_i(r_i + 1)} B_i \cdot B_i \right). \end{aligned}$$

Originally, the signature formula for cyclic coverings is formulated for 4-manifold as follows.

Theorem [Hirzebruch [Hz2]] Let X be a compact oriented differentiable manifold of dimension 4 without boundary on which the cyclic groups G_n of order n acts by orientation preserving diffeomorphisms. Suppose that Y is differential submanifold of X , not necessarily connected, and has codimension 2. And G_n operates freely on $X - Y$. Then

$$\text{Sign}(X) - n \cdot \text{Sign}(X/G_n) = - \frac{n^2 - 1}{3n} Y' \cdot Y'.$$

where Y' is the branch locus in X/G_n .

3. We prove the formula by applying the framework of the localization of characteristic classes based on the Čech-de Rham cohomology theory. ([Lh], [Lh2], [LS].) Classically, all sorts of topological invariants can be calculated as the integral value of differential forms through the de Rham theorem, which gives the representation of cohomology classes and describe the explicit correspondence in the Poincare duality. The Čech-de Rham cohomology theory plays the same role for relative cohomology groups as the Alexander-Lefschetz duality. So applying this analogy, we can localize Chern classes at the ramification set, which gives us more specific geometric information about what is caused by degeneracy of holomorphic maps. If f gives a simple (non-ramified) μ -sheeted covering, then we see that $c_*(Y) - \mu c_*(X) = 0$, which suggests us that the gap is brought about the ramification. So we expect that subtraction of Chern classes can be localized at the ramification set. This is the principal and primitive idea of our proof.

References

- [GrH] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1978.
- [Hz1] F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1966.
- [Hz2] F. Hirzebruch, *The signature of ramified coverings*, Global Analysis (papers in Honor of K. Kodaira), Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1969, pp. 253-265
- [Iv] B. Iversen, *Numerical invariants and multiple planes*, Amer.-J. Math. **92**, 1970, 968-996.
- [Lh] D. Lehmann, *Variétés stratifiées C^∞ : Intégration de Čech-de Rham et théorie de Chern-Weil*, Geometry and Topology of Submanifolds II, Proc. Conf., May 30-June 3, 1988, Avignon, France, World Scientific, Singapore, 1990, pp 205-248.
- [Lh2] D. Lehmann, *Résidue, des sous-variétés invariantes d'un feuilletage singulier*, Ann. Inst. Fourier **41**, 1991, 211-258.
- [LS] D. Lehmann and T. Suwa, *Residues of holomorphic vector fields relative to singular invariant subvarieties*, Geometry and Topology of Submanifolds II, Proc. Conf., May 30-June 3, 1988, Avignon, France, World Scientific, Singapore, 1990, pp 205-248.
- [S] T. Suwa, Lectures at Hokkaido University, 1994-1995.
- [Y] Y. Yomdin, *The structure of strata $\mu = \text{const}$ in a critical set of a complete intersection singularities*, Singularities, part 2 (Arcata, Calif., 1981), Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983, 663-665.

符号数が0でない曲面上の曲面束の一構成法

阪大・理

遠藤 入頭

endo@math.sci.osaka-u.ac.jp

曲面上の曲面束に対して、その全空間の符号数 (signature) は曲面束のホモロジー的な振れを反映していると考えられる。ここでは特に底やファイバーの種数 (genus) と符号数との関係について述べる。

Σ_g, Σ_h : 種数 g, h の向きづけられた閉曲面

$\text{Diff}+\Sigma_h$: Σ_h の向きを保つ自己 C^∞ 同相全体のなす群

定義 (曲面上の曲面束)

Σ_g 上の Σ_h 束とは C^∞ ファイバー束 $\xi = (E, \Sigma_g, p, \Sigma_h, \text{Diff}+\Sigma_h)$ のことである。ここで、 E は全空間、 $p: E \rightarrow \Sigma_g$ は射影、 $\text{Diff}+\Sigma_h$ は構造群である。 E の符号数を $\tau(E)$ とかくことにする。

さて、 ξ が自明な場合、つまり $E = \Sigma_g \times \Sigma_h$ の場合には符号数の積公式

$$\tau(E) = \tau(\Sigma_g) \tau(\Sigma_h) = 0$$

が成り立つ。(K nneth の公式、交叉形式の定義からすぐわかる。)

スペクトル系列を調べれば、この公式は ξ のホモロジー的な振れが自明な場合に拡張される。

定理 (Chern-Hirzebruch-Serre [5] 1957)

底の基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$ がファイバーのホモロジー群 $H_1(\Sigma_h, \mathbb{Z})$ に自明に作用しているならば、 $\tau(E) = 0$ である。

符号数が0でないような曲面上の曲面束の最初の例は、Kodaira [12] と Atiyah [1] によって与えられた。

定理 (Kodaira [12] 1967)

各 $m, t \in \mathbb{Z}$ ($m \geq 2, t \geq 3$) に対して、次式をみたすような Σ_g 上の Σ_h 束 $\xi = \xi(m, t)$ が存在する。

$$g = m^{2t}(t-1)+1$$

$$h = mt$$

$$\tau(E) = \frac{4}{3} m^{2t-1} (t-1) (m^2-1)$$

$\xi(m, t)$ の全空間 E は $\Sigma_g \times \Sigma_t$ の m 重分岐被覆として構成される一般型代数曲面であり、その符号数 $\tau(E)$ は G-signature 定理によって計算できる ([9], [11] 参照)。

曲面上の曲面束の符号数を求める一般的な公式は Meyer [16][17] によって与えられた。具体的には、Leray-Serre スペクトル系列により $\tau(E)$ を局所係数コホモロジー群 $H^1(\Sigma_g, H_1(\Sigma_h, \mathbb{R}))$ の上の対称双線型形式の符号数としていいかえ、さらに Σ_g のパンツ分解を通してそれを “signature cocycle”

$$\tau_h : Sp(2h, \mathbb{Z}) \times Sp(2h, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

を用いて書き下した。Meyer はこの公式と Birman-Hilden [3] の結果や Atiyah-Singer の定理を用いて次を示した。

定理 (Meyer [16][17] 1973)

各 $h \geq 0$ に対し、ある $g \geq 0$ とある Σ_g 上の Σ_h 束 E が存在して $\tau(E) = n$ となるような $n \in \mathbb{Z}$ の全体の集合を $S(h)$ とかく。

$$(1) \quad S(1) = S(2) = \{0\}$$

$$(2) \quad S(h) = 4\mathbb{Z} \quad (h \geq 3)$$

この Meyer の定理とふまえて次の問題を考える。

問題 各 $h \geq 3$, $n \in \mathbb{Z} (n \neq 0)$ に対して、 $\tau(E) = 4n$ をみたす Σ_g 上の Σ_h 束 E が存在するような最小の g を $g(h, n)$ とかく。

この値 $g(h, n)$ を計算せよ。

この問題に関して次の結果を得た。

定理 各 $h \geq 3$, $n \in \mathbb{Z} (n \neq 0)$ に対し、次の不等式が成り立つ。

$$\frac{|n|}{h-1} + 1 \leq g(h, n) \leq 111 |n|$$

証明のポイント

(左側の不等式) : Lück [14] による群の L^2 -Betti 数の考察から

曲面上の曲面束は Winkelnkemper の不等式をみたす。

(右側の不等式) : Meyer の符号数を与える準同型 $\hat{r} : H_2(M_h, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$

によって与えられた $4n$ にうつるような $H_2(M_h, \mathbb{Z})$ の元と特徴づける。このとき、Hopf の定理より M_h の 2-cycle を M_h の Wajnryb 関係子からなる word とみなす。

さらに、ホロミー準同型 $\chi : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow M_h$ を $H_2(\pi_1(\Sigma_g))$ の生成元が与えられた $H_2(M_h)$ の元にうつるように構成する。ここで、commutator の飛び越し操作 (commutator collection process の最もシンプルな場合) を行う。

※ M_h は Σ_h の写像類群である。

定理に関連してわかったこと

- (1) Meyer の定理の (2) において、 $S(h) \supset 4\mathbb{Z}$ は Birman-Hilden [3] と signature cocycle からわかり、 $S(h) \subset 4\mathbb{Z}$ は Atiyah-Singer の定理からわかる。しかし、Wajnryb [19] の表示を用いれば Atiyah-Singer の定理は不必要で、直接 $S(h) = 4\mathbb{Z}$ がわかる。
- (2) 言平曲式 $g(h, n) \leq 111|n|$ を得る際に作られる曲面上の曲面束は $h=3$, $g=111$, $\tau(E)=4$ をみたす。これは Kodaira [12] の系列 $\xi(m, n)$ の中で、最も種数の小さい $\xi(2, 3)$ (これは $h=6$, $g=129$, $\tau(E)=256$ をみたす) よりもさらに種数が小さい。
- (3) Chern-Hirzebruch-Serre の定理の仮定をみたさない (つまり、 $\pi_1(\Sigma_g)$ の $H_1(\Sigma_h, \mathbb{Z})$ への作用が自明でないような) 曲面上の曲面束 ξ で $\tau(E)=0$ となるものをたくさん具体的に作る事ができる。
(一般に $\tau(E)=4n$ となる ξ もたくさん作る事ができる。)

REFERENCES

1. M. F. Atiyah, *The signature of fibre-bundles*, Global Analysis, Papers in Honor of K.Kodaira, Tokyo Univ. Press, 1969, pp. 73-84.
2. W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3 Folge, Bd 4, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984.
3. J. Birman and H. Hilden, *On mapping class groups of closed surfaces as covering spaces*, Advances in the Theory of Riemann Surfaces, Ann. Math. Stud. 66, Princeton Univ. Press, 1971, pp. 81-115.
4. K. S. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Math. 87, Springer-Verlag, 1982.
5. S. S. Chern, F. Hirzebruch and J. P. Serre, *On index of a fibred manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 587-596.
6. C. J. Earle and J. Eells, *The diffeomorphism group of a compact Riemann surface*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 557-559.
7. A. M. Gaglione and H. V. Waldinger, *The commutator collection process*, Contemp. Math. 109 (1990), 43-58.
8. A. Hatcher and W. Thurston, *A presentation for the mapping class group of a closed oriented surface*, Topology 19 (1980), 221-237.
9. F. Hirzebruch, *The signature of ramified coverings*, Global Analysis, Papers in Honor of K.Kodaira, Tokyo Univ. Press, 1969, pp. 253-265.
10. S. Humphries, *Generators for the mapping class group of a closed orientable surface*, Topology of Low-dimensional Manifolds, Lecture Notes in Mathematics 722, Springer, Berlin, 1979, pp. 44-47.
11. F. E. A. Johnson, *A rational invariant for certain infinite discrete groups*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 113 (1993), 473-478.
12. K. Kodaira, *A certain type of irregular algebraic surfaces*, J. Anal. Math. 19 (1967), 207-215.
13. W. B. R. Lickorish, *A finite set of generators for the homotopy group of 2-manifold*, Proc. Camb. Phil. Soc. 60 (1964), 769-778.
14. W. Lück, *L^2 -Betti numbers of mapping tori and groups*, Topology 33 (1994), 203-214.
15. W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, Interscience Publ., 1966.
16. W. Meyer, *Die Signatur von lokalen Koeffizientensystemen und Faserbündeln*, Bonner Mathematische Schriften 53 (1972).
17. W. Meyer, *Die Signatur von Flächenbündeln*, Math. Ann. 201 (1973), 239-264.
18. S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Invent. Math. 90 (1987), 551-577.
19. B. Wajnryb, *A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface*, Israel J. Math. 45 (1989), 157-174.
20. C. T. C. Wall, *Geometric structures on complex analytic surfaces*, Topology 25 (1986), 119-153.

井桁にまつわるエトセトラ

大場 清 (お祭の水女子大理)

橋本 義武 (大阪市立大理)

1. Gauss 平面 (すなわち 座標関数 z を fix した複素アフィン直線) 上の 平行・等長な線分の対を「井桁」と呼ぶ. 井桁に切れ目を入れ, 平行移動で貼り合わせ, 無限遠点をつけると, 絵描き歌のように, 種数 1 のコンパクト Riemann 面ができる. ただし, 無限遠点 P と P での接空間の framing $(dz^{-1})_P: T_P X \rightarrow \mathbb{C}$ が定まっている.

同様に, g 個の互いに交わらない井桁から, 種数 g の framed point 付きコンパクト Riemann 面 $(X, P, \phi: T_P X \rightarrow \mathbb{C})$ ができる. このとき, 微分 dz が P に 2 位の極をもつ X 上の微分形式を定める.

したがって, 井桁を動かすこと — 井桁崩し — は,

「微分形式の原始関数を fix して, framed point 付き Riemann 面の複素構造を変形する」

ことになるわけだが, 今回はこの「」の中を定式化するというお話である.

2. (X, P, ϕ) を種数 g の framed point 付きコンパクト Riemann 面, L を X 上の h 次の holomorphic line bundle とする. これに対して, P のまわりでの座標と L の自明化とが自然に定まることを述べる.

まず $\dim H^0(X, L + n_L P) = 0$, $\dim H^0(X, L + (n_L + 1)P) = 1$ をみたす整数 n_L がただ一つ存在する. n_L は $1 - g + h + n_L \leq 0$, $h + n_L + 1 \geq 0$ すなわち $-h - 1 \leq n_L \leq g - h - 1$ をみたす.

$L^\vee = \text{Hom}(L, \Omega^1)$ に対しても同様に整数 n_{L^\vee} が定まり,

$$1-g+2g-2-h+n_{L^\vee} \leq 0, \quad 2g-2-h+n_{L^\vee}+1 \geq 0 \quad \text{すなわち}$$

$$-2g+h+1 \leq n_{L^\vee} \leq -g+h+1 \quad \text{をみたす.} \quad \text{よって} \quad -2g \leq n_L+n_{L^\vee} \leq 0.$$

さらに, 自然な pairing

$$H^0(X, L+(n_L+1)P) \otimes H^0(X, L^\vee+(n_{L^\vee}+1)P) \rightarrow H^0(X, \Omega^1+(n_L+n_{L^\vee}+2)P)$$

の像は 1次元で, $H^0(X, \Omega^1+(n_L+n_{L^\vee}+1)P)$ には入らない. よって留数

定理より $n_L+n_{L^\vee} \neq -1$. このとき P のまわりの座標関数 z^{-1} が,

$z^{-1}(P)=0, \quad (dz^{-1})_P = \phi$ をみたし, $dz^{n_L+n_{L^\vee}+1}$ が上の pairing の像に入る, という条件の下, $n_L+n_{L^\vee} \leq -2$ のときは一意に,

$n_L+n_{L^\vee}=0$ のときは z に定数充足任意性を除いて一意に存在する.

$\Theta \subset \text{Pic}_{g-1}(X)$ を theta divisor, すなわち $g-1$ 次の effective divisors の線型同値類の全体とし,

$$\chi(L) = \dim H^0(X, L) - \dim H^1(X, L) = 1-g+h$$

とおくと, $n_L+n_{L^\vee}=0$ は $L - \chi(L)P \notin \Theta$ に同値.

n_L のとり方より, $L+(n_L+1)P$ の 0 でない section σ_0 が定数倍を除いて一意に定まる. そこで, $L+nP$ の section σ に対し, $z^{n_L+1}\sigma_0^{-1}\sigma$ を展開して $z \in \mathbb{C}[z] \oplus \mathbb{C}[[z^{-1}]]$ の元を対応させる. こうして P のまわりでの L の自明化が得られた.

そこで, $H^0(X, L+*P) = \bigcup_n H^0(X, L+nP)$ を $z \in \mathbb{C}[z] \oplus \mathbb{C}[[z^{-1}]]$ の部分空間と見なすことができる. これは σ_0 のとり方によらない.

3. $H_+ = z \in \mathbb{C}[z], \quad H_- = \mathbb{C}[[z^{-1}]], \quad H = H_+ \oplus H_-$ とおく. H の部分ベクトル空間 V で, 射影 $V \rightarrow H/H_-$ が Fredholm すなわち核・余核が有限次元のもの全体を Gr と書く. この Grassmann 多様体は index すなわち核と余核の次元の差 χ によって分けられる:

$$\text{Gr} = \bigsqcup_{\chi \in \mathbb{Z}} \text{Gr}_\chi. \quad \text{前に述べた対応により, } H^0(X, L+*P) \text{ は}$$

$\text{Gr}_{\chi(L)}$ の元と見なすことができる.

(X, P, ϕ, L, π) の moduli $\mathcal{X}_{g,h}$ は $4g$ 次元で、今これから Gr_{1-g+h} への写像が得られたことになる。これをまとめて $\Phi: \bigsqcup \mathcal{X}_{g,h} \rightarrow Gr$ と書く。

$\mathcal{X}_{0,h}$ は 1 点で、像は $\pi^{-1-h} H_+ \in Gr_{1+h}$ 。

また、 $g \geq 1$ のとき、 $L = \mathcal{O}$ の場合を考えると、 $\mathcal{O} - \chi(\mathcal{O})P \in \mathcal{O}$ だから、 (X, P, ϕ) の moduli $\mathcal{M}_{g,*}$ から Gr_{1-g} への写像が得られる。

次に Grassmann 多様体 Gr の Plucker 埋込みについて述べる。

整数の増大列 $n_1 < n_2 < \dots$ で十分大きい j に対し $n_j = j - \chi$ をみたすものについて、 \mathcal{H} の元の可算個の外積 $\pi^{n_1} \wedge \pi^{n_2} \wedge \dots$ を考え、これらの可算線型和のなすベクトル空間を Λ_χ とする。

Gr_χ の元 V の base を、各ベクトルが有限個を除いて monic すなわち最高次の係数が 1 であって、次数が相異なるようにとることができる。このようなものを admissible base と呼ぼう。

その元を次数の小さい順に並べてすべての外積をとり、それを展開して $\Lambda_\chi \setminus 0$ の元を得る。（ Λ_χ に入らない項は落とす。） admissible base をとりかえても結果は定数倍されるだけなので、 Gr_χ から $\mathbb{P}\Lambda_\chi$ への写像が得られたことになる。これは単射で、像は、

$$\Lambda_\chi \otimes \Lambda_\chi \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^* \otimes \Lambda_\chi \otimes \Lambda_\chi \rightarrow \Lambda_{\chi+1} \otimes \Lambda_{\chi-1}$$

の合成を Δ と書くと、2 次式 $\Delta(\pi, \pi) = 0$ で特徴づけられる (Plucker 関係式)。

$\mathbb{P}\Lambda_\chi$ 上の hyperplane bundle を Gr_χ に制限したものを determinant bundle という。これを $\mathcal{X}_{g,h}$ にひきもどすと何になるかをみよう。

g, h に対して十分大きい N をとれば, \mathcal{H} の代わりに $\mathcal{H}/z^N \mathcal{H}$ を用いてこれまでの話を実現することができる. この場合, z を定数倍することから導かれる \mathbb{C}^* 作用が determinant bundle にいつくする. 一方この \mathbb{C}^* 作用は, $\mathcal{X}_{g,h}$ 上 framing ϕ を定数倍する作用である. $g \geq 1$ ならばこれは fixed-point free なので, 商をとると $\mathcal{X}_{g,h}/\mathbb{C}^*$ 上の orbifold line bundle が得られる. (X, L) を fix したところに制限すると, これは $X/\text{Aut}(X)$ 上の tangent bundle のべきに同型になる.

[問題] determinant bundle は $\mathcal{M}_{g,*}$ 上自明か?

4. 最後に $\Phi: \bigcup \mathcal{X}_{g,h} \rightarrow \text{Gr}$ が単射であることを述べる.

Gr 上に, \mathcal{H} の元を z 倍することから導かれる \mathbb{Z} 作用がある. z 倍は Gr_X を Gr_{X-1} にうつす.

また, \mathcal{H} の元を z^m 倍 ($m \geq 1$) する写像は, $V \in \text{Gr}$ に対し線型写像 $[z^m]: V \rightarrow \mathcal{H}/V$ を導くので, これを Gr 上のベクトル場とみなすことができる. これらは互いに可換で, \mathbb{Z} 作用とも可換. こうして Gr 上には $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^\infty$ が作用する.

Krichever, 佐藤らの結果を用いると, $\Phi(\mathcal{X}_{g,h})$ 上の 1 点に対してそれを含む orbit が $\bigcup \text{Pic}_d(X)$ に双正則であることがわかる. これを Gr に入っている stratification に重ねて見ると, $\mathcal{X}_{g,h}$ の点が増えられている. たとえば X は $\text{Pic}_1(X)$ の中の effective な部分として切り出される.

こうして写像 Φ によって,

「微分形式の原始関数を fix して, framed point 付き Riemann 面の複素構造を变形する」

ことが実現される.

以上の話は Riemann 面に特異点がある場合にも拡張される.

(了)

Hyperbolic $4g$ -gons and $PSU(1,1)$ -representations of surface groups

Takayuki OKAI (岡井孝行)

§0. Preliminaries

Let Σ_g be an oriented closed surface of genus $g \geq 2$. First of all, we fix a marking $(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\alpha}_g, \hat{\beta}_g)$ of Σ_g ; after choices of a base point $* \in \Sigma_g$ and an element of inner automorphism of $\pi_1(\Sigma_g, *)$, we have a system of generators $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ of $\pi_1(\Sigma_g, *)$ with relation $\prod_{i=1}^g [\alpha_i, \beta_i] = 1$, which is a representative of the marking $(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\beta}_g)$. Thus the choices of $(*; (\alpha_1, \dots, \beta_g))$ is nothing but the choices of homotopy classes of paths from a fixed point $*_0 \in \Sigma_g$ to arbitrary points $* \in \Sigma_g$, which constitute the universal covering $\tilde{\Sigma}_g$ of Σ_g .

Definition. (1). For $\ell = (\ell_i) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^g$, $\tilde{\ell} = (\tilde{\ell}_i) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^g$ and $\varphi = (\varphi_j) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{4g}$, the triple $(\ell, \tilde{\ell}, \varphi)$ is said to be a system of data of a marked hyperbolic $4g$ -gon if it satisfies the following two conditions:

$$\textcircled{1}. \quad \sum_{j=1}^{4g} \varphi_j \equiv 0 \pmod{2\pi},$$

$$\textcircled{2}. \quad \prod_{i=1}^g \{ \text{eh}(\ell_i) e(\varphi_{4i-3}) \text{eh}(\tilde{\ell}_i) e(\varphi_{4i-2}) \text{eh}(\ell_i) e(\varphi_{4i-1}) \text{eh}(\tilde{\ell}_i) e(\varphi_{4i}) \} = I,$$

where $\text{eh}(\ell) = \begin{bmatrix} \text{ch}(\frac{\ell}{2}) & \text{sh}(\frac{\ell}{2}) \\ \text{sh}(\frac{\ell}{2}) & \text{ch}(\frac{\ell}{2}) \end{bmatrix} \in PSU(1,1)$, $e(\varphi) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix} \in PSU(1,1)$ and $\prod_{i=1}^g A_i = A_1 \cdots A_g$.

(2). For a system of data $(\ell, \tilde{\ell}, \varphi)$ as in (1), a marked hyperbolic $4g$ -gon $X(\ell, \tilde{\ell}, \varphi)$ is a collection of successive $4g$ oriented geodesic arcs in the Poincaré disk \mathbb{D}^2 , named as $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \dots, \alpha_g, \beta_g, \alpha_g^{-1}, \beta_g^{-1}$ (some of them may be shrunk to a point) with the following properties:

(i). length of $\alpha_i = \text{length of } \alpha_i^{-1} = l_i$, length of $\beta_i = \text{length of } \beta_i^{-1} = \tilde{l}_i$
 $(i=1, \dots, g)$,

(ii). the exterior angles from α_i to β_i , from β_i to α_i^{-1} , \dots , from β_g^{-1} to α_1 are
 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{4g}$, respectively.

Note that the condition ② is nothing but the condition that $X(l, \tilde{l}, \varphi)$ forms a closed curve in \mathbb{D}^2 .

Example. Given a Riemann surface (Σ_g, h) with marking $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$, a point $* \in \Sigma_g$ and a system of generators $(\alpha_i, \dots, \beta_g)$ of $\pi_1(\Sigma_g, *)$ representing $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$, we can construct a marked hyperbolic $4g$ -gon $X_{h,m} = X_{h,m}(l, \tilde{l}, \varphi)$ ($m = (*; (\alpha_1, \dots, \beta_g)) \in \Sigma_g$) with $l_i, \tilde{l}_i > 0$ by tracing the unique realizations of $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \dots, \alpha_g, \beta_g, \alpha_g^{-1}, \beta_g^{-1}$, which are geodesic arcs from $*$ to $*$.

Facts ([02], [03]). (1). Using the above marked hyperbolic $4g$ -gon $X_{h,m}(l, \tilde{l}, \varphi)$, after fixing a lift of the geodesic arc α_1 to the direction of the real axis $\subset \mathbb{D}^2$ starting from 0, we can write down the holonomy representation $\rho = \rho(l, \tilde{l}, \varphi) : \pi_1(\Sigma_g, *) \longrightarrow \text{PSU}(1, 1)$, which corresponds to the given marked Riemann surface :

$$(\star): \begin{cases} \rho(\alpha_i) = e\left(\sum_{j=1}^{4i-4} \varphi_j\right) \text{eh}(l_i) e(\pi - (\varphi_{4i-2} + \varphi_{4i-1})) e\left(-\sum_{j=1}^{4i-4} \varphi_j\right) \\ \rho(\beta_i) = e\left(-\pi + \sum_{j=1}^{4i-1} \varphi_j\right) \text{eh}(\tilde{l}_i) e(-\pi + (\varphi_{4i-3} + \varphi_{4i-2})) e\left(\pi - \sum_{j=1}^{4i-1} \varphi_j\right). \end{cases}$$

Here we remark that, under the condition ②, the condition ① is equivalent to the relation

$$\prod_{i=1}^g [\rho(\alpha_i), \rho(\beta_i)] = I.$$

(2). A holonomy representation ρ is said to be in the standard position if $\text{ax}(\rho(\alpha_1)) =$ the real axis and $\text{ax}(\rho(\alpha_1)) \cap \text{ax}(\rho(\beta_1)) = \{0\} \subset \mathbb{D}^2$ (here for a hyperbolic element $A \in \text{PSU}(1, 1)$, $\text{ax}(A)$ denotes the axis of A). For any holonomy representation $\rho : \pi_1(\Sigma_g, *) \longrightarrow \text{PSU}(1, 1)$,

we can construct a conjugate transformation in $PSU(1,1)$ so that ρ is transformed to a representation in the standard position. In particular, we can determine a geodesic arc δ from $p_0 = \hat{\alpha}_1 \wedge \hat{\beta}_1$ to $*$, which gives the identification (as a marking) of $(\alpha_1, \dots, \beta_g) \in \pi_1(\bar{\Sigma}_g, *)$ with a "canonical" system of generators $(\alpha_1^{(0)}, \dots, \beta_g^{(0)}) \in \pi_1(\bar{\Sigma}_g, p_0)$ determined by the conditions $\alpha_1^{(0)} = \hat{\alpha}_1$ and $\beta_1^{(0)} = \hat{\beta}_1$. (For a closed curve $\gamma \in (\bar{\Sigma}_g, k)$, $\hat{\gamma}$ denotes the unique closed geodesic free-homotopic to γ .)

Remark. For $m_0 = (p_0; (\alpha_1^{(0)}, \dots, \beta_g^{(0)})) \in \tilde{\Sigma}_g$, the marked hyperbolic $4g$ -gon X_{R, m_0} becomes a convex $4g$ -gon, having no self intersections [K]; thus this surrounds a fundamental domain of $(\bar{\Sigma}_g, k)$. In general, $X_{R, m}(\ell, \hat{\ell}, \varphi)$ is not always convex (Example of S. Kojima (see Appendix)).

§1. Case for the Teichmüller component.

It is well-known that the space of representations $\text{Hom}(\pi_1(\bar{\Sigma}_g), PSU(1,1)) / \text{conj.}$ is decomposed into its connected components $\text{Hom}(\pi_1(\bar{\Sigma}_g), PSU(1,1))^{e=n} / \text{conj.}$ ($n \in [2-2g, 2g-2] \cap \mathbb{Z}$) by the Euler number e of representations [G]. Note that the connected component of $e = 2-2g$ is naturally identified with the Teichmüller space \mathcal{T}_g of $\bar{\Sigma}_g$.

In §0. Facts. (1), we have described the holonomy representation $\rho(\ell, \hat{\ell}, \varphi)$ from the data of marked hyperbolic $4g$ -gon $X_{R, m}(\ell, \hat{\ell}, \varphi)$. We claim that the converse also holds: Starting from an abstract representation $\rho: \pi_1(\bar{\Sigma}_g) \rightarrow PSU(1,1)$ with $e(\rho) = 2-2g$ (under a normalization " $\Phi_1 = 0$ " (see below)), we can determine a marked hyperbolic $4g$ -gon which reproduces the given ρ :

Lemma 1.1.1. (Cartan decomposition of $PSU(1,1)$). Any element $\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in PSU(1,1)$ with $b \neq 0$ is uniquely decomposed as $\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} = e(\Phi) e(\ell) e(\Theta)$ with $\ell > 0$ and $\Phi, \Theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Proof. In fact, if we write the lifts of $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ to $SU(1,1)$ as $\pm \begin{pmatrix} |a|e^{i\theta} & |b|e^{i\psi} \\ |b|e^{-i\psi} & |a|e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, ℓ, Φ, Θ are determined by $\ell = 2 \log \{ |a| + \sqrt{|a|^2 - 1} \}$ and $(\Phi, \Theta) = (\theta + \psi, \theta - \psi)$. \square

Here we remark that $((\theta + \pi) + (\psi + \pi), (\theta + \pi) - (\psi + \pi)) = (\theta + \psi, \theta - \psi) \pmod{2\pi}$, and thus $(\theta + \psi, \theta - \psi)$ does not depend on a choice of a lift in $SU(1,1)$. We also remark that " $\ell = 0$ " corresponds to " $b = 0$ " and $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ can be written as $e(\Phi)eh(0)e(\Theta) = e(\Phi + \Theta)$ for some Φ and Θ (only the sum $\Phi + \Theta$ is uniquely determined).

Recall that the description of $\rho(\ell, \tilde{\ell}, \varphi)$ in §0 needs a normalization for the position of a lift of geodesic arc α_1 . When we decompose $\rho(\ell, \tilde{\ell}, \varphi)(\alpha_1)$ as $e(\Phi_1)eh(\ell_1)e(\Theta_1)$, this normalization can be written as the condition " $\Phi_1 = 0$ ".

Thus given any abstract representation $\rho^\vee \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), PSU(1,1))^{e=2-2g}$ (or equivalently, given elements $\rho^\vee(\alpha_i), \rho^\vee(\beta_i) \in PSU(1,1)$ ($i=1, \dots, g$) with $\prod_{i=1}^g [\rho^\vee(\alpha_i), \rho^\vee(\beta_i)] = I$ and $e(\rho^\vee) = 2-2g$), first we decompose $\rho^\vee(\alpha_i)$ as $e(\Phi_i^\vee)eh(\ell_i^\vee)e(\Theta_i^\vee)$ (note that $\ell_i^\vee > 0$, because $\rho^\vee(\alpha_i)$ is a hyperbolic element) and put $e(\Phi_i^\vee)^{-1}\rho^\vee e(\Phi_i^\vee) = \rho$. This ρ satisfies the condition " $\Phi_i = 0$ ". Second we give the Cartan decompositions $\rho(\alpha_i) = e(\Phi_i)eh(\ell_i)e(\Theta_i)$, $\rho(\beta_i) = e(\tilde{\Phi}_i)eh(\tilde{\ell}_i)e(\tilde{\Theta}_i)$ ($i=1, \dots, g$), where $\Phi_i = 0$ and $\ell_i, \tilde{\ell}_i > 0$, and seek for $\varphi = (\varphi_j) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{4g}$ satisfying the equations (\star) for this ρ :

Lemma 1.1.2. Given $\Phi_i, \Theta_i, \tilde{\Phi}_i, \tilde{\Theta}_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ($i=1, \dots, g$) with $\Phi_i = 0$, the system of equations for $\varphi_j \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ($j=1, \dots, 4g$) with $\sum_{j=1}^{4g} \varphi_j \equiv 0$,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{4i-4} \varphi_j = \Phi_i, & (\pi - (\varphi_{4i-2} + \varphi_{4i-1})) + (-\sum_{j=1}^{4i-4} \varphi_j) = \Theta_i, \\ -\pi + \sum_{j=1}^{4i-1} \varphi_j = \tilde{\Phi}_i, & (-\pi + (\varphi_{4i-3} + \varphi_{4i-2})) + (\pi - \sum_{j=1}^{4i-1} \varphi_j) = \tilde{\Theta}_i \end{cases}$$

has a unique solution $(\star\star): \begin{cases} \varphi_{4i-3} = \Theta_i + \tilde{\Phi}_i \\ \varphi_{4i-2} = \pi - \Theta_i + \tilde{\Theta}_i \\ \varphi_{4i-1} = -\Phi_i - \tilde{\Theta}_i \\ \varphi_{4i} = -\pi - \tilde{\Phi}_i + \Phi_{i+1} \end{cases} \quad (i=1, \dots, g \pmod{g})$ \square

Now we can directly check that this $(\ell, \tilde{\ell}, \varphi)$ satisfies the conditions ① and ②; thus we obtain a system of data $(\ell, \tilde{\ell}, \varphi)$ of a marked fundamental $4g$ -gon, which satisfies $\rho(\ell, \tilde{\ell}, \varphi) = \rho$.

Summing up we have

Theorem 1.1. We can construct a one to one correspondence between the following two objects:

- (1). $\{\rho \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSU}(1,1))^{e=2-2g}; \rho \text{ satisfies the condition } "\Phi_1 = 0"$ in the Cartan decomposition $\rho(\alpha_1) = e(\Phi_1) \text{ch}(\ell_1) e(\Theta_1)$ (which we denote by $\text{Rep}_{\Phi_1=0}^{e=2-2g}$),
- (2). $\{(\ell, \tilde{\ell}, \varphi) \in (\mathbb{R}_{>0})^g \times (\mathbb{R}_{>0})^g \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{4g}; (\ell, \tilde{\ell}, \varphi) \text{ satisfies } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ and } e(\rho(\ell, \tilde{\ell}, \varphi)) = 2-2g\}$. \square

We note that the procedure of the normalization " $\Phi_1 = 0$ " gives an S^1 -bundle $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSU}(1,1))^{e=2-2g} \longrightarrow \text{Rep}_{\Phi_1=0}^{e=2-2g}$, because every ρ with $e(\rho) = 2-2g$ has a Cartan decomposition $\rho(\alpha_1) = e(\Phi_1) \text{ch}(\ell_1) e(\Theta_1)$ with $\ell_1 > 0$, so that the factor $e(\Phi_1)$ can be specified in each ρ .

Now we investigate geometric meanings of $\rho \in \text{Rep}_{\Phi_1=0}^{e=2-2g}$. Using the method of Facts (2) in §0 (see [O3, §2, Remarks (2)]), we can determine the standard position for this ρ . Also we can determine a base point $* \in \Sigma_g$ and a representative $(\alpha_1, \dots, \beta_g) \subset \pi_1(\Sigma_g, *)$ of the marking $(\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\beta}_g)$, using the path δ specified by the standard position. The fact (Theorem 1.1) that ρ can be regarded as $\rho(\ell, \tilde{\ell}, \varphi)$ for a unique marked hyperbolic $4g$ -gon $X(\ell, \tilde{\ell}, \varphi)$ means that, if we realize $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ as the geodesic arcs from $*$ to $*$ with respect to the hyperbolic structure determined by $[\rho] \in \mathcal{T}_g$, the resulting marked hyperbolic $4g$ -gon (see §0. Example) coincides with $X(\ell, \tilde{\ell}, \varphi)$. Thus ρ can be regarded as the holonomy representation $\pi_1(\Sigma_g, *) \longrightarrow \text{PSU}(1,1)$ (satisfying " $\Phi_1 = 0$ ") for a unique $m = (*; (\alpha_1, \dots, \beta_g))$ and a unique hyperbolic structure determined by $[\rho]$, and $X(\ell, \tilde{\ell}, \varphi)$ corresponds to the realization

of $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ by geodesic arcs.

Conversely, given any $\tau \in \mathcal{T}_g$ and any $m = (*; (\alpha_1, \dots, \beta_g)) \in \widetilde{\Sigma}_g$, we can construct a unique $\rho \in \text{Rep}_{\Phi_1=0}^{e=2-2g}$ with the property that $\rho(\alpha_i), \rho(\beta_i)$ are regarded as holonomies by closed paths α_i, β_i from $*$ to $*$ with respect to the hyperbolic structure determined by $\tau = [\rho]$.

Thus the space $\text{Rep}_{\Phi_1=0}^{e=2-2g}$ has a product structure $\mathcal{T}_g \times \widetilde{\Sigma}_g$. As a summary, we have the following

Theorem 1.2. The $\text{PSU}(1,1)$ -bundle $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSU}(1,1))^{e=2-2g} \longrightarrow \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSU}(1,1))^{e=2-2g} / \text{conj.}$ is decomposed into two product fibrations

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSU}(1,1))^{e=2-2g} & \approx & \mathcal{T}_g \times \widetilde{\Sigma}_g \times S^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Rep}_{\Phi_1=0}^{e=2-2g} & \approx & \mathcal{T}_g \times \widetilde{\Sigma}_g \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSU}(1,1))^{e=2-2g} / \text{conj.} & \approx & \mathcal{T}_g .
 \end{array}$$

In each horizontal space $\mathcal{T}_g \times \{m\} \subset \text{Rep}_{\Phi_1=0}^{e=2-2g}$ ($m = (*; (\alpha_1, \dots, \beta_g)) \in \widetilde{\Sigma}_g$), every element ρ is endowed with a geometric meaning as the holonomy representation $\pi_1(\Sigma_g, *) \longrightarrow \text{PSU}(1,1)$ (with " $\Phi_1=0$ ") for the hyperbolic structure determined by $[\rho] \in \mathcal{T}_g$ and the specified generators $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ of $\pi_1(\Sigma_g, *)$, whose realizations by geodesic arcs correspond to the marked hyperbolic $4g$ -gon of ρ . Moreover given any $\rho \in \text{Rep}_{\Phi_1=0}^{e=2-2g}$, using the standard position of ρ , we can determine the point $m \in \widetilde{\Sigma}_g$, for which ρ becomes the holonomy representation. \square

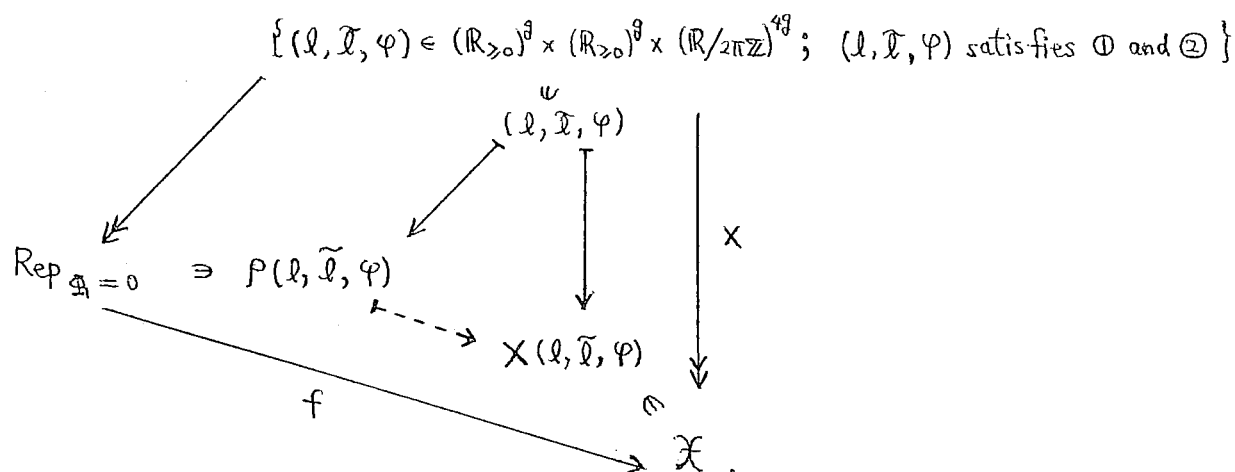
§2. Components with small Euler numbers.

For representations ρ with $e(\rho) = 2-2g$, to give a system of data $(l, \mathcal{I}, \varphi)$ was equivalent to give (the marked isometry class of) a marked hyperbolic $4g$ -gon $X(l, \mathcal{I}, \varphi)$, because all l_i

and \tilde{l}_i must be positive and thus we can determine all φ_j uniquely from the picture of $X(l, \tilde{l}, \varphi)$. For p with $|e(p)| < 2g-2$, the situation becomes different: A system of data (l, \tilde{l}, φ) determines a unique $X(l, \tilde{l}, \varphi)$, but the converse is not true in general.

How is the relation between p and (l, \tilde{l}, φ) (cf. Theorem 1.1)? Of course, given any (l, \tilde{l}, φ) with ① and ②, we can determine a unique representation p with " $\Phi_1 = 0$ " by the formula (*). On the contrary, if we are given any p with " $\Phi_1 = 0$ ", we can make Cartan decompositions $p(\alpha_i) = e(\tilde{\Phi}_i) \text{eh}(\tilde{l}_i) e(\tilde{\Theta}_i)$ and $p(\beta_i) = e(\tilde{\Phi}_i) \text{eh}(\tilde{l}_i) e(\tilde{\Theta}_i)$ (with $\tilde{l}_i, \tilde{l}_i \geq 0$), and using the formula (**), we can construct a system of data (l, \tilde{l}, φ) . Here if \tilde{l}_i (resp. $\tilde{l}_i = 0$), only the value $\tilde{\Phi}_i + \tilde{\Theta}_i$ (resp. $\tilde{\Phi}_i + \tilde{\Theta}_i$) is well-defined, and thus there remains some freedom in the determination of φ . Nevertheless, we will claim that p can determine a unique marked hyperbolic $4g$ -gon $X(l, \tilde{l}, \varphi)$:

Theorem 2. There exists a map f from $\{p \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSU}(1,1)) ; p \text{ satisfies } \Phi_1 = 0\} = \text{Rep}_{\Phi_1=0}$ to $\{(\text{marked isometry class of}) \text{ marked hyperbolic } 4g\text{-gons } X(l, \tilde{l}, \varphi)\} = \mathcal{X}$. such that the following diagram commutes:



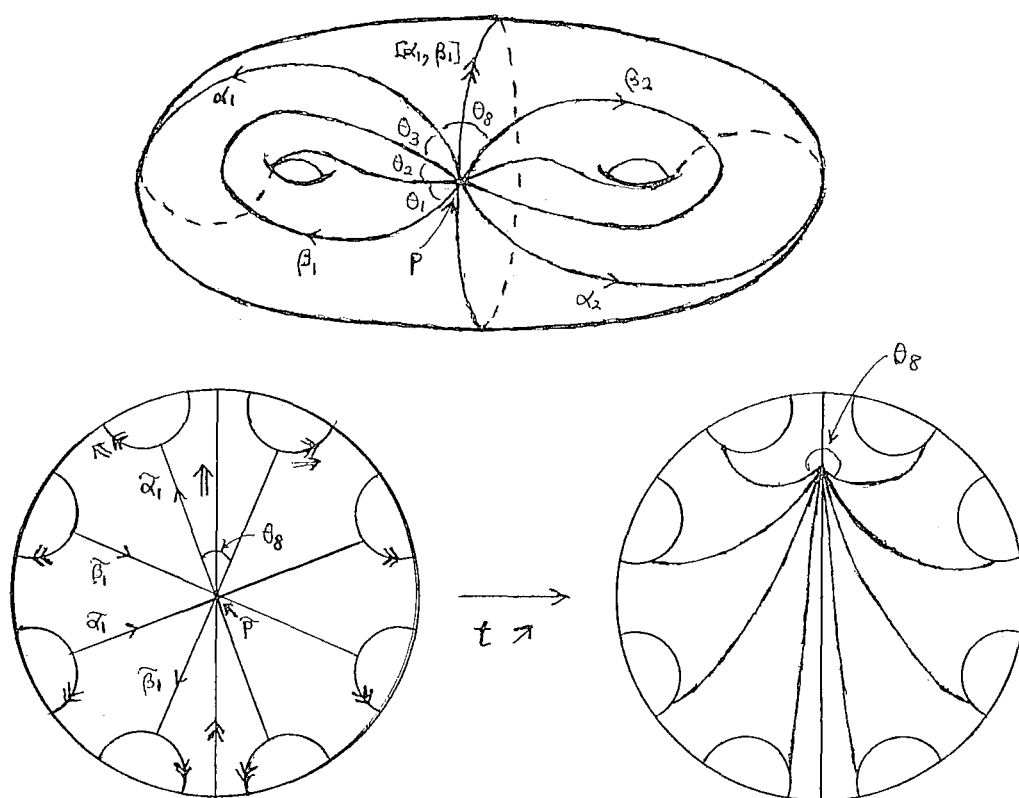
Moreover the maps X and f are bijective if we are restricted to the case $\tilde{l}_i > 0$ and $\tilde{l}_i > 0$ ($i=1, \dots, g$).

Proof. Given any $p \in \text{Rep}_{\Phi_1=0}$, we take an arbitrary (l, \tilde{l}, φ) such that $p = p(l, \tilde{l}, \varphi)$ and define the map f by $p \mapsto X(l, \tilde{l}, \varphi)$. We will show the well-definedness

of f : Suppose that $l_i = 0$. On the representation P , we have $p(\alpha_i) = e(\Phi_i + \Theta_i)$. On the marked hyperbolic $4g$ -gon $X(l, \bar{l}, \varphi)$, there are contractions of edges to points and thus in the picture of $X(l, \bar{l}, \varphi)$, some outer angles appear as "sums of some φ_j 's". Because the lengths of edges α_i and α_i^{-1} become 0, the collection of "sums of φ_j 's" must contain $\varphi_{4i-4} + \varphi_{4i-3}$ and $\varphi_{4i-2} + \varphi_{4i-1}$ as summation factors. Notice that in the formula $(\star\star)$, only φ_{4i-3} (resp. φ_{4i-4} , φ_{4i-2} , φ_{4i-1}) contains $+\Theta_i$ (resp. $+\Phi_i$, $-\Theta_i$, $-\Phi_i$) among φ_j 's. Thus the "sums of φ_j 's" must be written in terms of $\Phi_i + \Theta_i$ and other Φ_R , Θ_R , $\tilde{\Phi}_R$, $\tilde{\Theta}_R$ ($R \neq i$). The case for $\bar{l}_i = 0$ can be treated as well. In this way we can determine all the appearing outer angles (which may be sums of φ_j 's) in the picture of $X(l, \bar{l}, \varphi)$, only using the data of P . Thus the map f is well-defined. \square

Appendix. Example of non-convex marked hyperbolic $4g$ -gon which surrounds a fundamental domain (d'après Professor S. Kojima)

Let us start with the regular marked hyperbolic octagon with all the interior angles $\theta_j = \pi - \varphi_j = \frac{\pi}{4}$. After the procedure of pasting, we have a Riemann surface (Σ_2, R) and geodesic arcs $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ from a point $p \in \Sigma_2$ to p (p corresponds to the vertices). By symmetry, p is situated in the closed geodesic $[\alpha_1, \beta_1]$. Now let us move the point p along $[\alpha_1, \beta_1]$ to the direction of $[\alpha_1, \beta_1]$; we obtain a one parameter family of points $p(t)$ ($t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$). We can show that, for all $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, the geodesic arcs $\alpha_1(t), \dots, \beta_2(t)$ from $p(t)$ to $p(t)$, representing the given marking, are all simple and have intersections only at $p(t)$. Thus we obtain a marked hyperbolic $4g$ -gon which surrounds a fundamental domain of (Σ_2, R) . Also, as $t \rightarrow \infty$, all the interior angles except for θ_8 converge to zero; thus θ_8 becomes $> \pi$ for enough large t . (See the pictures below.)



References.

- [G] W. Goldman : Topological components of spaces of representations, *Invent. Math.* 93 (1988), 557-607.
- [K] L. Keen : Canonical polygons for finitely generated Fuchsian groups, *Acta Math.* 115 (1966), 1-16.
- [O1] T. Okai : Effects of a change of pants decompositions on their Fenchel-Nielsen coordinates, *Kobe J. Math.* 10 (1993), 215-223.
- [O2] T. Okai : Reading the Fuchsian representations of a closed Riemann surface from its fundamental domains, preprint.
- [O3] T. Okai : Hyperbolic $4g$ -gons and Fuchsian representations, 数理解析研究所講究録 967 *Analysis of Discrete Groups* (1996), 132-141.

タイヒミュラー空間の座標付けとその応用

リーマン面に関連する位相幾何学 (1997.9.16-19.)

金沢大学工学部 奥村善英 (Yoshihide OKUMURA)

Abstract

ものの大きさを知る（あるいは、表示する）ために、いくつかの特定の部分の長さを測ることをよく行う。これから、素朴な問題として、「リーマン面を、いくつかの指定された閉測地線の長さのみで表示できるか？」が考えられる。これは、「タイヒミュラー空間を長さ変数のみで表示できるか？」と同じ問題となり、古くから可能であることが知られている。

まず、タイヒミュラー空間を大域実解析的に表示する長さ変数の最少個数と、この変数空間について考察する。しかし、この変数空間は複雑であることが分かる。次に、「双曲幾何では長さより角度の方が細工しやすく情報量が多いだろう」というアイデアで、角度によるタイヒミュラー空間の大域実解析的な表示を考察する。

また、これらの考察を解く鍵となる一次変換の幾何に関する結果も述べる。

さらに、フックス群の行列群への持ち上げを用いて、リーマン面上の単純分割閉曲線の特徴付けを行う。

- 1 まくら
- 2 準備
- 3 長さ変数によるタイヒミュラー空間の座標付け
- 4 角度変数によるタイヒミュラー空間の座標付け
- 5 $(1, 0, 1)$ 型タイヒミュラー空間の場合
- 6 $(2, 0, 0)$ 型タイヒミュラー空間の場合
- 7 一次変換の幾何とトレース不等式
- 8 持ち上げ問題と単純分割閉曲線の特徴付け

1 まくら

詳しい定義は2節で行うことにして、この説では、問題提起と各節の簡単な説明を行う。

私達は、「もの」の部分的な長さを測るだけで、ある程度正確に「もの」全体の大きさを理解することがある。また、より正確な大きさを知るために測る部分を増やすことを行う。卑近な例として、バスト・ウエスト・ヒップの3サイズ（3つの

特定の閉曲線の長さ)、場合によっては、さらに首まわり等を測ることで、体の大きさを判断し、服を購入している。「もの」をリーマン面にすることで、次の素朴な問題が考えられる。

Problem 1.1 リーマン面 S を、いくつかの指定された閉測地線の長さのみで表示できるか (したがって、二つの異なるリーマン面を区別できるか) ?

□

この問題を考えるためには、まず閉測地線の指定の方法を考える必要がある。例えば、 S の基本群 $\Pi_1(S)$ の標準生成元系

$$\Sigma = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

を与えると、1番目と2番目の生成元の積 $x_1 x_2$ に自由ホモトピックな閉測地線のように、すべての閉測地線を Σ の元の積で指定できる。閉測地線の指定の方法を考えると、正確には S ではなく、組 (S, Σ) の表示を求めることになる。この組は「標識付きリーマン面」といわれる。二つのリーマン面は等角同値なときに同じと考えられたが、今度は、二つの標識付きリーマン面をいつ同じとするかを考える必要が起こる。この議論から、「タイヒミュラー空間」が自然に導入されて、問題 1.1 は次のように言いかえられる。

Problem 1.2 タイヒミュラー空間を、標識付きリーマン面上のいくつかの指定された閉測地線の長さのみで変数表示できるか ?

□

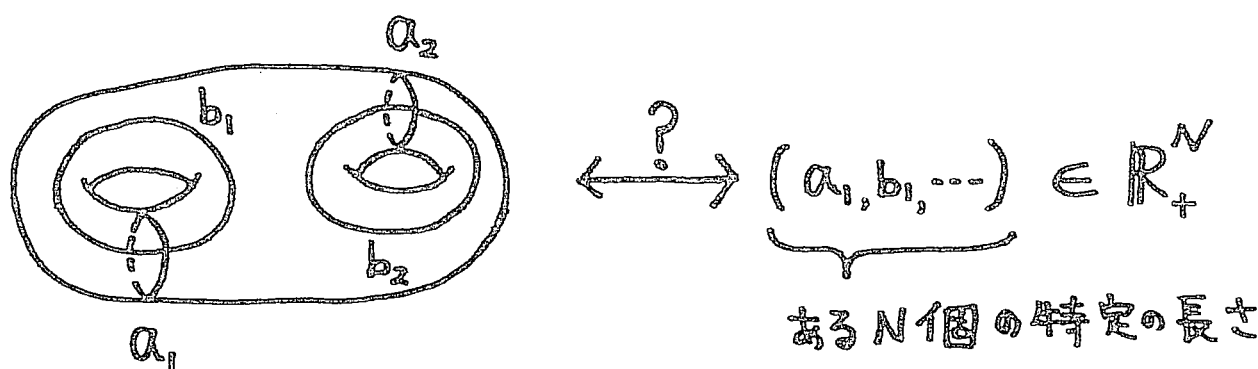


図 1.1

S を双曲型リーマン面とすると、複素平面の単位円板 \mathbf{D} に作用する適当なフックス群 G により、 S は商空間 \mathbf{D}/G と表される。また、一意化定理より $\Pi_1(S)$ は G と群同型なので、 Σ から G の「標準生成元系」が得られることになる。これから、問題 1.2 は、フックス群の言葉に翻訳できる。

2 節では、タイヒミュラー空間や「一次変換の平方根」の定義等を行う。

3 節では、問題 1.2 を「長さ変数」による座標付けの問題に翻訳できることを示し、その結果を述べる。

長さ変数の変数空間は複雑になることから、4 節では、新たな「良い」変数として、「角度変数」を導入する。そして、問題 1.2 を角度変数による座標付けの問題に翻訳し、その結果を述べる。

5、6 節では、 $(1,0,1)$ 型と $(2,0,0)$ 型タイヒミュラー空間の場合に、長さ変数と角度変数に関する具体的な結果を述べる。

上述の結果を導くために、筆者は一次変換の幾何を考察した。7 節では、このような幾何に関する結果を一つ述べる。

筆者は座標付けの問題の考察から、フックス群の「持ち上げ問題」を構成的に証明した。8 節では、フックス群の持ち上げを用いて、リーマン面上の「単純分割閉曲線」の特徴付けを行う。

7、8 節は、他の節と独立に読むことができる。

2 準備

この説では、双曲型変換の軸、フックス群の標準生成元系、タイヒミュラー空間や一次変換の平方根の定義等を行う。

複素球面 $\hat{\mathbf{C}}$ に作用する一次変換全体の群を $M(\hat{\mathbf{C}})$ と表す。各元は、

$$g(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{C}, \quad ad - bc = 1$$

と表され、特殊線型群 $SL(2, \mathbf{C})$ の二つの元

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対応する。これらの行列は g の二つの行列表現といわれる。また、 \mathbf{D} を不変にする一次変換全体の群を $M(\mathbf{D})$ と表す。 $M(\mathbf{D})$ の双曲型変換 g は単位円周上に異なる二つの不動点を持つが、これらを結ぶ (\mathbf{D} 上の双曲距離に関する) 測地線は g の軸 $\text{ax}(g)$ といわれる。筆者は、一次変換の幾何を考える場合に有用となるので、軸に湧き出し不動点 $p(g)$ から吸い込み不動点 $q(g)$ への向きも与えることにする。

タイヒミュラー空間をフックス群の生成元系から定義するため、次の結果に注目する。

Theorem 2.1 (Keen [5]) G を \mathbf{D} に作用する $(g, 0, m)$ 型 ($2g + m \geq 3$) のフックス群 (つまり、 \mathbf{D}/G が種数 g で m 個の穴を持つリーマン面になる) とする。このとき、 G の生成元系 Σ として、次を満たすものがとれる：

(i) $A_j, B_j, C_j := [B_j, A_j] = B_j^{-1}A_j^{-1}B_jA_j$ ($j = 1, \dots, g$) と E_k ($k = 1, \dots, m$) を、図 2.1 のような軸の配置を持つ双曲型変換とする。ただし、 $g = 0$ (resp. $m = 0$) のときには、 A_j, B_j と C_j (resp. E_k) を除く。

(ii) $\Sigma = (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, E_1, \dots, E_m)$.

(iii) $E_m E_{m-1} \dots E_1 C_g C_{g-1} \dots C_1 = \text{identity}$.

□

この定理の主張 (ii) と (iii) は、 G が表現するリーマン面の基本群の標準生成元系表示から分かる。実際、 A_j, B_j はこのリーマン面の同じ一つのハンドル、 E_k は一つの穴のまわりをまわる生成元に対応する。メインは (i) の主張となるが、これは A_j, B_j, C_j, E_k の不動点の配置に関する主張ともいえる。 G をビルディング・ブロックといわれる基本的な $(1, 0, 1)$ 型部分群と $(0, 0, 3)$ 型部分群に分割し、各部分群の生成元の軸の配置を調べることで、この主張を示せる。この示し方は、基本群の標準生成元系をファン・カンペンの定理を用いて決定する方法によくにている。

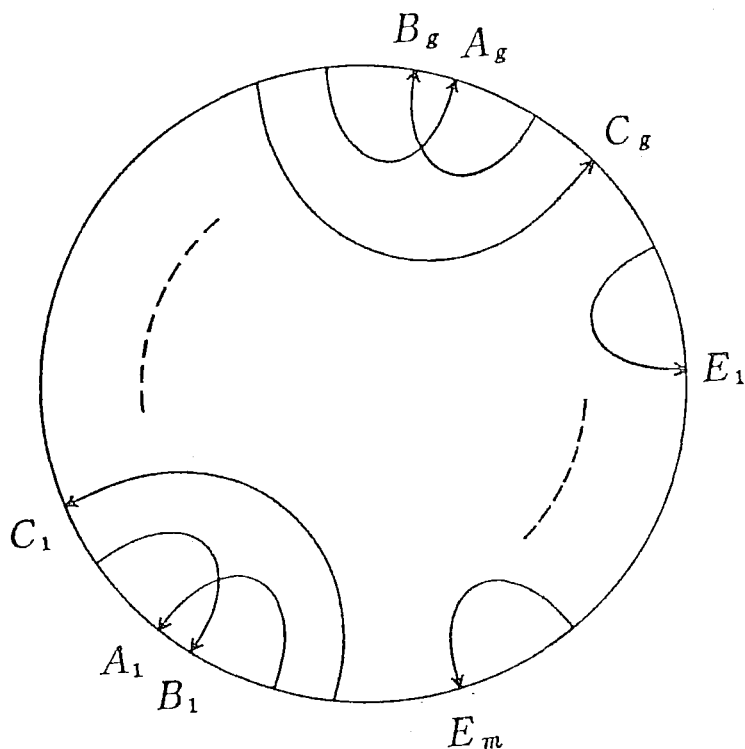


図 2.1

Definition 2.2 定理 2.1 で述べた生成元系 Σ は $(g, 0, m)$ 型標準生成元系といわれる。二つの $(g, 0, m)$ 型標準生成元系 $\Sigma_1 = (x_j)$ と $\Sigma_2 = (y_j)$ は、適当な $h \in M(\mathbf{D})$ により、生成元の順番も考慮して各生成元が $y_j = hx_jh^{-1}$ 、つまり $\Sigma_2 = h\Sigma_1h^{-1}$ と表せるとき、同値といわれる。 $(g, 0, m)$ 型タイヒミュラー空間 $T(g, 0, m)$ ($2g+m \geq 3$) とは、 $(g, 0, m)$ 型標準生成元系 Σ の同値類 $[\Sigma]$ 全体の集合である。

□

標準生成元系を指定されたフックス群は標識付きフックス群といわれる。標準生成元系を指定することは、生成元の順番で表現するリーマン面のハンドルと穴に番号、つまり「標識」を付けることといえる。また、このようなリーマン面は標識付きリーマン面といわれる。同値な標準生成元系は、同じリーマン面を表してハンドルと穴の番号も同じにする、つまり同じ標識付きリーマン面を表すといえる。標識付きフックス群は、同値な標準生成元系を持つときに同値といわれる。明らかに、一つのフックス群からも標準生成元系を取りかえることで、同値でない標識付きフックス群が構成できる。 $T(g, 0, m)$ は $(g, 0, m)$ 型標識付きフックス群の同値類全体の集合ともいえる。古く（本質的には 19 世紀末）から様々な方法で、次の定理が示されている（定理 3.2 を参照）。

Theorem 2.3 $T(g, 0, m)$ ($2g + m \geq 3$) は $6g + 3m - 6$ 次元実解析的多様体となる。

□

筆者は一次変換の平方根を次のように定義した。定義自体はとても自然で単純だが、一次変換の幾何を考えるときにとても役立つことが分かる。

Definition 2.4 $A \in M(\mathbf{D})$ を双曲型または放物型とする。このとき、 $X \in M(\mathbf{D})$ で $X^2 = A$ を満たすもの（唯一に決まる）を A の平方根といい、 $A^{1/2}$ と表す。

□

A から $A^{1/2}$ を求める計算は容易である。実際、 A の行列表現を \tilde{A} とすると、 $A^{1/2}$ の行列表現は、

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{|\operatorname{tr}(\tilde{A})| + 2}}(\tilde{A} - I) \quad (\operatorname{tr}(\tilde{A}) < 0 \text{ の場合}),$$

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{|\operatorname{tr}(\tilde{A})| + 2}}(\tilde{A} + I) \quad (\operatorname{tr}(\tilde{A}) > 0 \text{ の場合})$$

となる。

A が一般の一次変換のときには、 X に制限を加えないと、このような X は唯一に決まらない。

3 長さ変数によるタイヒミュラー空間の座標付け

まず、問題 1.2 が次に述べる標準生成元系の同値類を決定する問題にいかえられることを示そう。

Problem 3.1 標準生成元系 Σ で生成されるフックス群を考える。この群の双曲型変換のトレースの絶対値をいくつか指定し、これらの値で $[\Sigma]$ を実解析的に表示せよ。さらに、この変数空間も記述せよ。

□

★ トレースの絶対値を変数に採用した理由：

(1) トレースの絶対値は一次変換の共役で不変なので、 Σ の選び方によらない同値類 $[\Sigma]$ での意味を持つ量となる。

(2) 同値類 $[\Sigma]$ の任意の元は同じ標識付きリーマン面を表していた。双曲型変換 g のトレースの絶対値は、「 g に対応する曲面上の閉測地線の長さに実解析的に対応する」という幾何的な解釈ができる。実際、 g に対応する閉測地線の長さは、 g のトランスレーション・レングス $tl(g)$ (g による移動距離の下限のこと) に一致し、 $tl(g)$ が、

$$\begin{aligned} tl(g) &:= \inf\{d(z, g(z)) | z \in \mathbb{D}\} \\ &= 2 \cosh^{-1} \frac{|\operatorname{tr}(g)|}{2} \end{aligned}$$

(ただし、 d を定曲率 -1 の双曲距離とする) とトレースの絶対値の実解析関数になることから分かる。この理由から、トレースの絶対値は長さ変数といわれることがある。

以上の理由から、問題 3.1 は問題 1.2 を標準生成元系の言葉に翻訳した問題であることが分かる。

長さ変数は一次変換の共役で不変となる。よって、長さ変数の情報は一次変換の共役で保たれる性質を記述することになる。R. Fricke の時代から、同値類 $[\Sigma]$ は長さ変数のみで実解析的に決定されることが知られている (Fricke-Klein [3] を参照)。これから、次の定理を得る。

Theorem 3.2 タイヒミュラー空間は長さ変数のみからなる大域実解析座標を持つ。

□

$N_1(g, 0, m)$ を $T(g, 0, m)$ の大域実解析座標を与える長さ変数の最小個数とすると、次の問題が自然に考えられる。

Problem 3.3 $N_1(g, 0, m)$ を求めよ。

□

Wolpert [29], [30] の結果から、

$$\dim(T(g, 0, 0)) < N_1(g, 0, 0) \quad (3.1)$$

が導かれ、Seppälä-Sorvali [25] が、

$$N_1(g, 0, 0) \leq \dim(T(g, 0, 0)) + 2$$

となることを示した。

一方、筆者は $(g, 0, m)$ 型 ($m \neq 0$) 自由フックス群を特殊な性質を持った二元生成フックス部分群に分解し、各部分群を長さ変数で具体的に構成することで、次の定理を得た。

Theorem 3.4 (Okumura [13])

$$N_1(g, 0, m) = \dim(T(g, 0, m)) \quad (m \neq 0 \text{ の場合}).$$

□

また、この議論の応用として、筆者は Seppälä-Sorvali の結果の別証も行った。しかし、 $(g, 0, 0)$ 型フックス群は自由群でないことから、この議論でも $N_1(g, 0, 0)$ を決定することはできなかった。最終的に、筆者は一次変換の平方根を用いて一次変換の幾何を調べることにより、次の定理を得た。

Theorem 3.5 (Okumura [14])

$$N_1(g, 0, 0) = \dim(T(g, 0, 0)) + 1 = 6g - 5.$$

さらに、長さ変数をすべて単純閉測地線の長さから選べる。

□

この結果は Schmutz [22] も同時期に別方法で証明している。しかし、筆者の方法では詳細な議論が可能となり、長さ変数を具体的に与え、変数空間の記述にも成功している。具体的な場合の結果を、定理 5.1, 6.1 で報告する。

Remark 3.6 このような長さ変数の最小個数は、 $T(g, n, m)$ (ただし、 n はリーマン面の分岐点とパンクチャーの個数の和とする) の場合にも考えられている (Okumura [12])。

□

4 角度変数によるタイヒミュラー空間の座標付け

長さ変数の変数空間は複雑な多項式系で記述されることが分かり、長さ変数によるタイヒミュラー空間の解析は大変となる。筆者は別のアプローチとして、標識付きリーマン面上の測地線間の交角で座標付けすることを試みた。このような交角を角度変数ということにする。

リーマン面の閉測地線は標識で指定されたので、二つの閉測地線が一度だけ交わるなら、その交点も標識で指定される。さらに、このような交点を頂点とする多角形やその内角（角度変数に採用できる）も標識で指定されることになる。

問題 3.1 を角度変数の言葉に翻訳すると、次の問題が得られる。

Problem 4.1 標準生成元系 Σ が表現する標識付きリーマン面を考える。標識で、この面上の角度変数をいくつか指定して、これらの値で $[\Sigma]$ を実解析的に表示できるか？表示可能なら、この変数空間も記述せよ。

□

この問題の前半に関しては、実解析的に表示可能なことが示せる。実際、双曲幾何の性質「双曲三角形は三辺の長さと三内角のどちらからでも実解析的に決定できる」を用いて、次のように示せる：

双曲構造を持つリーマン面は、単位円板上の双曲計量に関する多角形として実現される。まず、標識で、長さ変数のデータを与える双曲三角形をいくつか指定する。これらの三角形は内角のみで決定されることから、長さ変数のデータも内角のみで与えられることになる。よって、問題 4.1 のような表示は可能となる。

問題 4.1 の前半の結果より、次の定理が得られる。

Theorem 4.2 タイヒミュラー空間は角度変数のみからなる大域実解析座標を持つ。

□

★ 角度変数を採用した理由：

(1) 上述の双曲幾何の性質から、双曲幾何では角度のデータは長さのデータに劣ると思えない。さらに、図 4.1 のように、図形を変形する際、角度は長さより「変化の方向」が記述しやすいと考えられる。このようにして、

双曲幾何では、角度は長さより情報量が多いだろう

というアイデアを筆者は持った。タイヒミュラー空間を大域実解析的に表示する角度変数の最小個数を $N_2(g, 0, m)$ とすると、

$$N_2(g, 0, m) \leq N_1(g, 0, m)?$$

と予想される。

(2) 双曲三角形の余弦定理を適用していくことで、長さ変数は角度変数の三角関数による有理式で表されられると思える（注意 5.5 を参照）。これから、長さ変数の多項式系で表される変数空間を、角度変数の三角関数からなる多項式系で表せると期待できる。三角関数の多項式は変形すると一次式に帰着できることから、角度変数の変数空間の記述は容易であるとも予想される。また、長さ変数の変数空間は非有界領域となっているが、角度変数の変数空間は、角度変数を上手にとることにより、 $(0, \pi)$ の直積空間に含まれる有界領域になることが示せる。

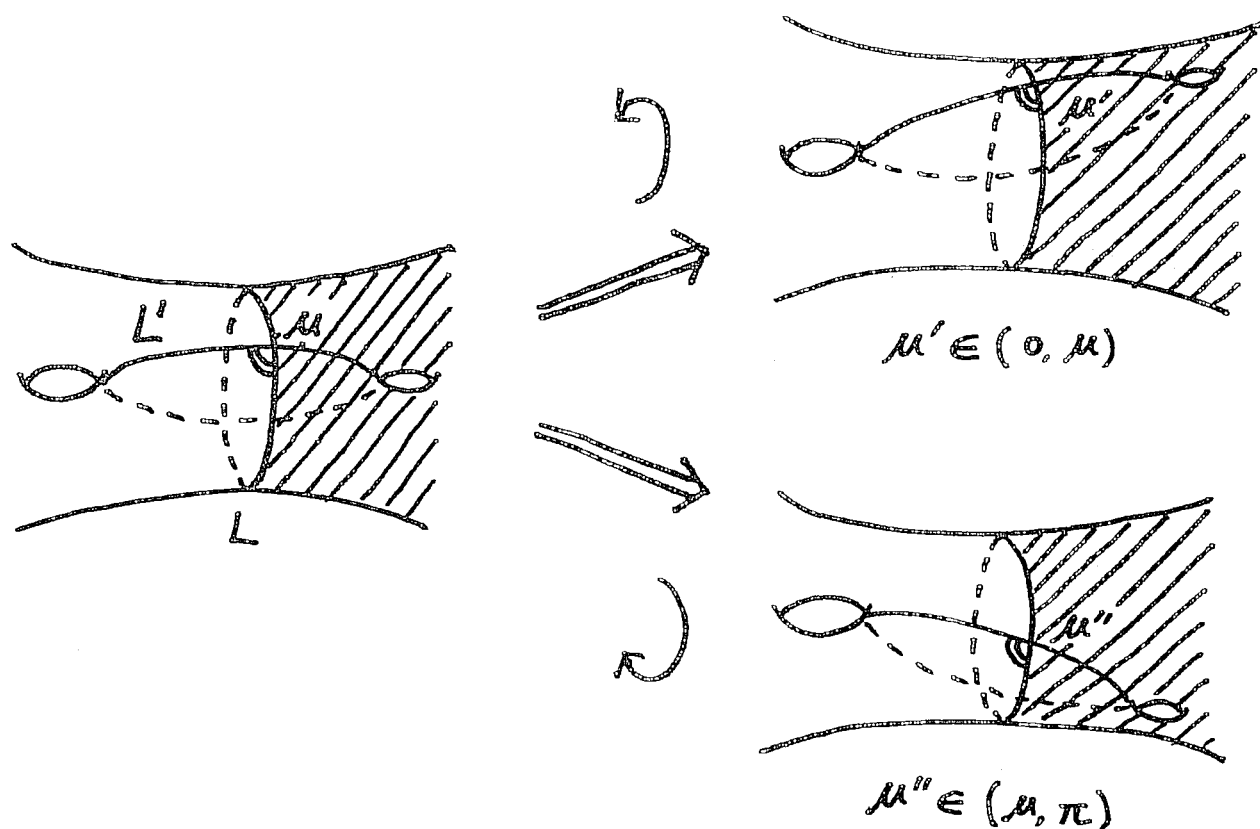


図 4.1 図のような閉測地線 L の右側のブロックのみを L に沿って「ずらす」ことを考える。これは L に関するフェンチェル・ニールセン変形といわれる。前後とずらす方向が違ってても、図の閉測地線 L' の長さでは等しくなることがあるので、 L' の長さのみでは二方向の変化は区別できない。
しかし、図の交角 μ では区別できる。

双曲型変換の軸から決定される多角形の辺の長さとの関係、一次変換の平方根で考察していくことで、次の結論が得られる。

Theorem 4.3 (Okumura [15],[18])

$$N_2(2, 0, 0) \leq \dim(T(2, 0, 0)) + 1.$$

(2, 0, 0) 型以外の場合には、

$$N_2(g, 0, m) = \dim(T(g, 0, m)).$$

□

Corollary 4.4 特に、 $g \geq 3$ の場合には、

$$N_2(g, 0, 0) = \dim(T(g, 0, 0)) < N_1(g, 0, 0)$$

となり、角度変数は長さ変数より情報量が多いといえる。

□

具体的な場合の結果を、定理 5.4, 6.3 で報告する。

5 (1, 0, 1) 型タイヒミュラー空間の場合

この説では、長さ変数と角度変数による $T(1, 0, 1)$ の具体的な座標付けを報告する。 $\Sigma_{(1,0,1)} = (A_1, B_1, C_1^{-1})$ (ただし、 $C_1 := [B_1, A_1]$) を (1, 0, 1) 型標準生成元系とする。

長さ変数による座標付けに関しては、次のような結果が多くの人達により示されている。

Theorem 5.1 (Fricke-Klein [3], Keen [6], Okumura [13], etc.) $x_1 := |\text{tr}(A_1)|$, $y_1 := |\text{tr}(B_1)|$ と $z_1 := |\text{tr}(B_1 A_1)|$ は、 A_1 と B_1 を同じ一次変換の共役を除いて (つまり、 h を $M(\mathbf{D})$ の任意の元とするとき hA_1h^{-1}, hB_1h^{-1} の形の元を) 実解析的に決める。したがって、 $[\Sigma_{(1,0,1)}]$ は実解析的に決まり、三個の長さ変数による $T(1, 0, 1)$ の大域実解析座標が得られ、 $N_1(1, 0, 1) = \dim(T(1, 0, 1))$ となる。また、この変数空間は次のように記述される：

$$x_1 > 2, y_1 > 2, z_1 > 2,$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_1 y_1 z_1 < 0.$$

□

この定理より、 A_1, B_1 に関係する三点（例えば、 A_1 の二つの不動点と A_1 と B_1 の軸の交点）を指定すると、 h の自由度はなくなり、 x_1, y_1, z_1 から A_1, B_1 が唯一に実解析的に決まることになる。このように、一次変換 h による共役の取り方を指定することは正規化するといわれる。

この定理で述べた変数空間は、「 A_1, B_1, C_1 が双曲型変換で A_1 と B_1 の軸が交わる」という条件のみから得られることが定理 7.1 より理解できる。

ここで、記号を一つ準備しよう。双曲平面またはその境界上の二点 z_1, z_2 にたいし、 $L(z_1, z_2)$ をこれらの二点を通り z_1 から z_2 への向きを持つ測地線とする。

角度変数による $T(1, 0, 1)$ の座標付けに関する結果は、次の定理を使って示される。

Theorem 5.2 (Okumura [18]) $A_1, B_1 \in M(\mathbf{D})$ を軸が交わる双曲型変換とすると、 $B_1 A_1$ も双曲型となる。また、 p_1 を A_1 と B_1 の軸の交点とすると、

$$\text{ax}(B_1 A_1) = L(A_1^{-1/2}(p_1), B_1^{1/2}(p_1)), \quad \frac{\text{tl}(B_1 A_1)}{2} = d(A_1^{-1/2}(p_1), B_1^{1/2}(p_1)).$$

これから、 A_1, B_1 と $B_1 A_1$ の軸は、三辺の長さが $\frac{\text{tl}(A_1)}{2}$, $\frac{\text{tl}(B_1)}{2}$ と $\frac{\text{tl}(B_1 A_1)}{2}$ の三角形を決める。特に、この三角形は一点につぶれることはない。

□

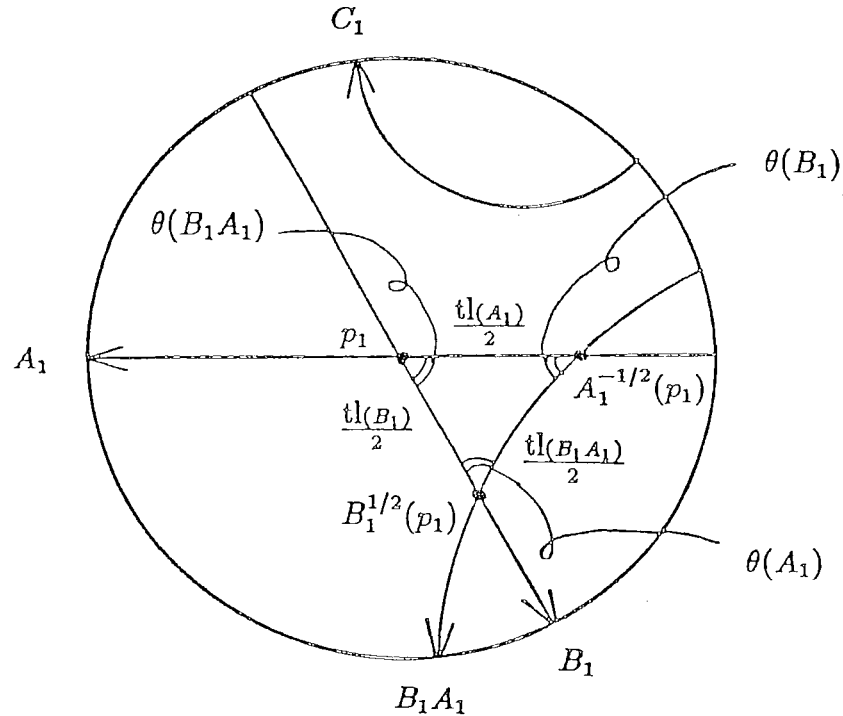


図 5.1 $p(A_1), q(B_1), q(A_1)$ と $p(B_1)$ が、この順で単位円周上に時計まわりに並ぶ場合（見やすいように、共役をとり、 A_1 の不動点を $p(g) = 1, q(g) = -1$ に p_1 を 0 となるように、 A_1, B_1 を正規化しておく）。

Remark 5.3 双曲型変換 g は、 $\text{tl}(g)$ (したがって、 $|\text{tr}(g)|$)、湧き出し不動点 $p(g)$ と吸い込み不動点 $q(g)$ により決められる。よって、 $B_1 A_1$ を幾何的に決定できることも、定理 5.2 は主張している！

□

定理 5.2 より、標準生成元系 $\Sigma_{(1,0,1)}$ の元 $A_1, B_1, B_1 A_1$ の軸は三角形を定める。その三内角を図 5.1 のように $\theta(A_1), \theta(B_1), \theta(B_1 A_1)$ とすると、次の定理が得られる。

Theorem 5.4 (Okumura [18]) 三内角 $\theta(A_1), \theta(B_1)$ と $\theta(B_1 A_1)$ は、 A_1 と B_1 を同じ一次変換の共役を除いて実解析的に決める。したがって、 $T(1, 0, 1)$ は三個の角度変数からなる大域実解析座標を持ち、 $N_2(1, 0, 1) = \dim(T(1, 0, 1))$ となる。また、この変数空間は次のように記述される：

$$\begin{aligned}\theta(A_1), \theta(B_1), \theta(B_1 A_1) &\in (0, \pi), \\ \theta(A_1) + \theta(B_1) + \theta(B_1 A_1) &< \pi, \\ F(\theta(A_1), \theta(B_1), \theta(B_1 A_1)) &> 1.\end{aligned}$$

ただし、

$$F(x, y, z) := \frac{\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2 \cos x \cos y \cos z - 1}{\sin x \sin y \sin z}.$$

□

この定理で述べた変数空間は、「双曲三角形の存在条件と A_1, B_1 の（任意の）行列表現 \tilde{A}_1, \tilde{B}_1 が

$$\text{tr}([\tilde{B}_1, \tilde{A}_1]) < -2$$

を満たす」という条件のみから得られる。 $F(\frac{11\pi}{12}, \frac{\pi}{36}, \frac{\pi}{36}) < 1$ のように一つの角度変数が π に近いと、 $F > 1$ は成り立たない。これは、 $A_1, B_1, B_1 A_1$ に対応する閉測地線の長さが極端に違うことに対応している。この変数空間は正四面体のエッジを削り取ったような領域になる。

Remark 5.5 図 5.1 の双曲三角形に余弦定理を用いることで、 A_1 の長さ変数は、

$$\begin{aligned}|\text{tr}(A_1)| &= 2 \cosh \frac{\text{tl}(A_1)}{2} \\ &= \frac{2\{\cos\theta(A_1) + \cos\theta(B_1)\cos\theta(B_1 A_1)\}}{\sin\theta(B_1)\sin\theta(B_1 A_1)}\end{aligned}$$

と角度変数の三角関数による有理式で表される。

□

以下、 $T(1,0,1)$ の座標付けで用いた長さ変数と角度変数の性質を見ていく。

$\Sigma_{(1,0,1)}$ が表現する標識付きリーマン面を S とする。このとき、 A_1, B_1 と $B_1 A_1$ の軸の射影は、 S の anti-holomorphic involution (J とする) で不変な単純閉測地線となり、 S 上に二つの合同な三角形を決める。これらの三角形と三内角は J でうつりあう。特に、三角形の三頂点、つまり、 $p_1, A_1^{-1/2}(p_1)$ と $B_1^{1/2}(p_1)$ の射影は J の不動点となる (図 5.2 を参照せよ)。これらから、次のことが分かる：

- ・長さ変数は J の三つの不動点から決まる三つの単純閉測地線の長さになる。
- ・角度変数は J の三つの不動点から決まる三角形の三内角になる。

このように、 $(1,0,1)$ 型の場合には、長さ変数と角度変数は J で指定され、 J の不変量となる。

S を C_1 の軸の射影で二成分に分割するとき、その有界成分は S のニールセン核といわれる。明らかに、 S のニールセン核も長さ変数や角度変数で実解析的に決定される。

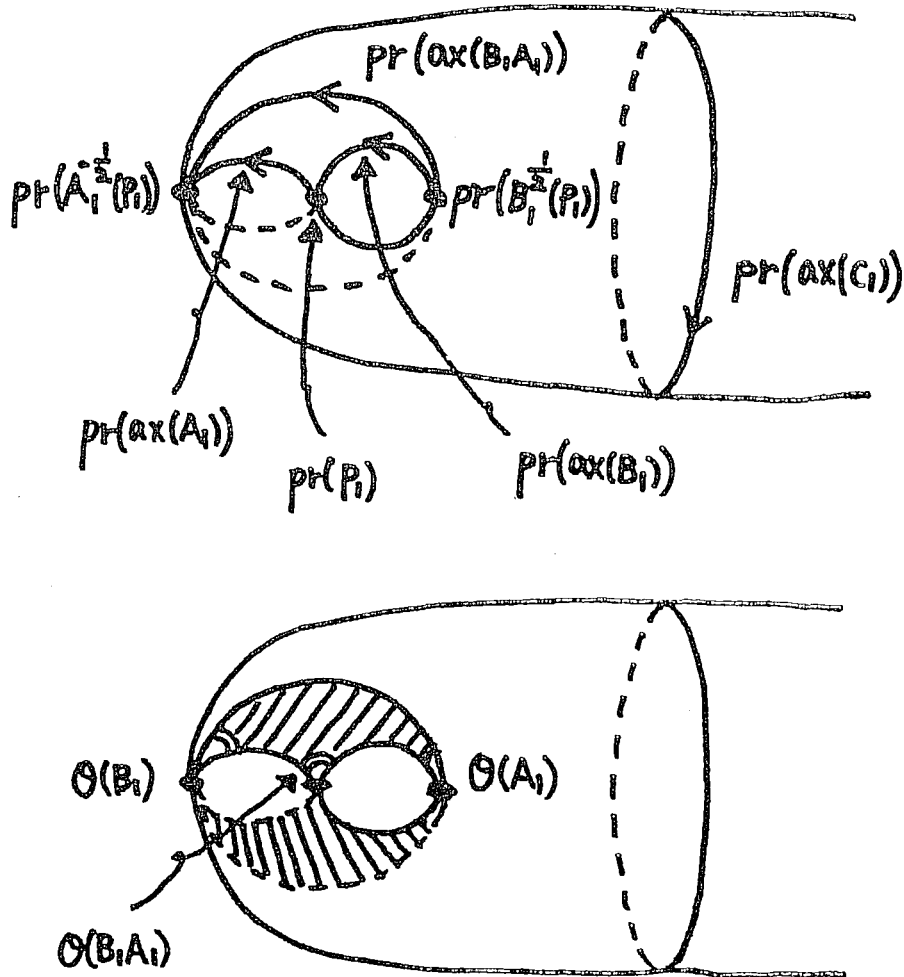


図 5.2

6 (2, 0, 0) 型タイヒミュラー空間の場合

この説では、長さ変数と角度変数による $T(2, 0, 0)$ の具体的な座標付けを報告する。 $(2, 0, 0)$ 型標準生成元系を $\Sigma_{(2,0,0)} = (A_1, B_1, A_2, B_2)$ とする。

長さ変数による座標付けに関しては、次の定理が成り立つ。

Theorem 6.1 (Okumura [14]) $T(2, 0, 0)$ は 7 個の長さ変数による大域実解析座標を持つ。このような長さ変数として、次の 7 個の双曲型変換のトレースの絶対値がとれる：

$$\begin{aligned} &A_1, B_1, B_1 A_1, \\ &A_2, B_2, B_2 A_2 A_1, B_2 A_2 B_1^{-1}. \end{aligned}$$

したがって、(3.1) より $N_1(2, 0, 0) = \dim(T(2, 0, 0)) + 1 = 7$ となる。また、この変数空間は次のように記述される：

$$x_j, y_j, z_1, u, v > 2 \quad (j = 1, 2), \quad (6.1)$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_1 y_1 z_1 = x_2^2 + y_2^2 + |\operatorname{tr}(B_2 A_2)|^2 - x_2 y_2 |\operatorname{tr}(B_2 A_2)| < 0, \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr}(B_2 A_2)| = \frac{1}{z_1^2 - 4} \{ &z_1 \sqrt{x_1 y_1 z_1 - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)} + 4 \sqrt{u v z_1 - (u^2 + v^2 + z_1^2)} + 4 \\ &+ 2(x_1 u + y_1 v) - z_1(y_1 u + x_1 v) \} > 2, \end{aligned} \quad (6.3)$$

ただし、 $x_j = |\operatorname{tr}(A_j)|$, $y_j = |\operatorname{tr}(B_j)|$ ($j = 1, 2$), $z_1 = |\operatorname{tr}(B_1 A_1)|$, $u = |\operatorname{tr}(B_2 A_2 A_1)|$ として $v = |\operatorname{tr}(B_2 A_2 B_1^{-1})|$ とする。

□

定理 6.1 の証明の概略：

適当に正規化した $\Sigma_{(2,0,0)}$ が、定理で述べた長さ変数で唯一に実解析的に決まることを示せばよい。正規化を、 A_1, B_1 に関係する三点を指定して行う。

$\Sigma_j := (A_j, B_j, C_j^{-1})$ ($j = 1, 2$) が $(1, 0, 1)$ 型標準生成元系となることが、フックス群の結合定理より示せる。

まず、 A_1, B_1 は x_1, y_1, z_1 で唯一に実解析的に決まること、この正規化と定理 5.1 より分かる。また、一次変換の幾何を調べることで、 $B_2 A_2$ は A_1, B_1 と u, v で唯一に実解析的に決まり、 $|\operatorname{tr}(B_2 A_2)|$ は (6.3) を満たすことが示せる（この部分が証明の鍵になる）。よって、定理 5.1 より $|\operatorname{tr}(B_2 A_2)|$ と x_2, y_2 から Σ_2 は共役を除いて実解析的に決まる。さらに、 $B_2 A_2$ と $C_2 (= C_1^{-1})$ の不動点がすでに定まっていることから、 Σ_2 つまり A_2, B_2 が唯一に実解析的に決まることになる。

変数空間は、「 $\Sigma_{(2,0,0)}$ が $(2, 0, 0)$ 型標準生成元系であることと、 Σ_j ($j = 1, 2$) が $(1, 0, 1)$ 型標準生成元系で $C_2 = C_1^{-1}$ となることが同値」となることから示される。特に、(6.2) は $|\operatorname{tr}(C_1)| = |\operatorname{tr}(C_2)|$ の条件より得られる。

□

次に、角度変数による $T(2, 0, 0)$ の座標付けについて考える。

$A_j, B_j, B_j A_j$ の軸からできる三角形の三内角を図 5.1 のような $\theta(A_j), \theta(B_j)$ と $\theta(B_j A_j)$ にする ($j = 1, 2$)。また、 A_j と B_j の軸の交点を p_j とし、 $\Sigma_{(2,0,0)}$ が表現する標識付きリーマン面 (S とする) へ射影した点を q_j とする ($j = 1, 2$)。 S は種数 2 のコンパクト・リーマン面より、hyperelliptic involution (J とする) を持つ。このとき、次の補題が得られる。

Lemma 6.2 q_1 と q_2 を通る測地線と C_1 の軸の射影は、ともに J で不変な単純閉測地線となる。さらに、これらの二つの閉測地線は二回交わり、二交点での交角は J でうつつりあい、角度は等しくなる。

□

実際、 $(B_2 A_2)^{-1} A_1 B_1$ の軸の射影が q_1 と q_2 を通る単純閉測地線となり、補題の主張が示せる。

μ を補題で述べた角度とする。

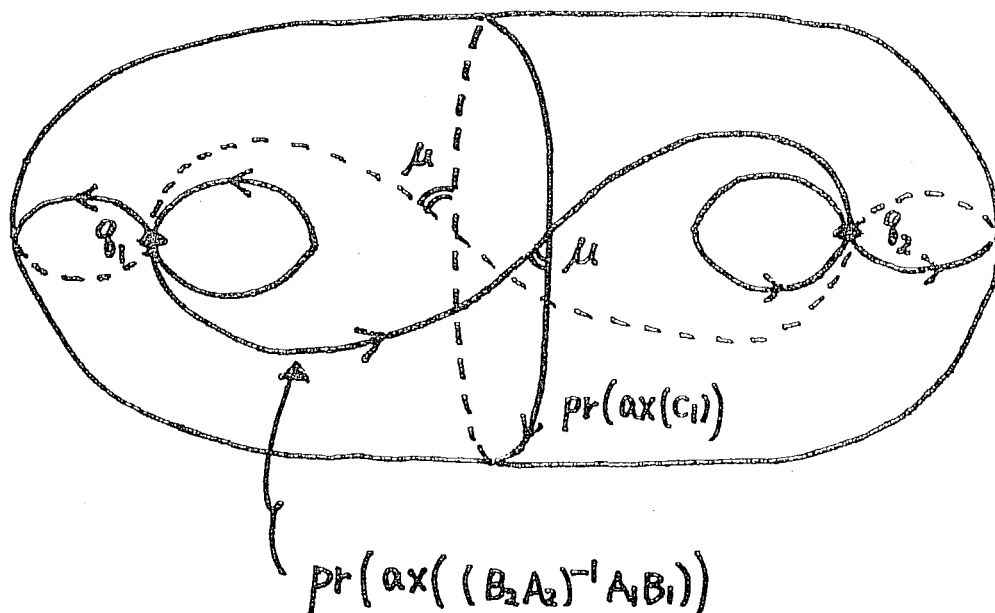


図 6.1

これらから、次の定理が得られる。

Theorem 6.3 (Okumura [18]) $T(2, 0, 0)$ は 7 個の角度変数 $\theta(A_j), \theta(B_j), \theta(B_j A_j)$ ($j = 1, 2$) と μ による大域実解析座標を持つ。ゆえに、 $N_2(2, 0, 0) \leq \dim(T(2, 0, 0)) + 1 = 7$ となる。また、この変数空間は次のように記述される：

$$\theta(A_j), \theta(B_j), \theta(B_j A_j), \mu \in (0, \pi) \quad (j = 1, 2), \quad (6.4)$$

$$\theta(A_j) + \theta(B_j) + \theta(B_j A_j) < \pi \quad (j = 1, 2), \quad (6.5)$$

$$F(\theta(A_1), \theta(B_1), \theta(B_1 A_1)) = F(\theta(A_2), \theta(B_2), \theta(B_2 A_2)) > 1. \quad (6.6)$$

□

定理 6.3 の証明の概略：

幾何的に説明しよう。

任意の $(2, 0, 0)$ 型標識付きリーマン面 S は C_1 の軸の射影（「単純分割閉測地線」となる）で分割すると、境界の長さが等しい二つの $(1, 0, 1)$ 型標識付きリーマン面のニールセン核ができる。逆に、境界の長さが等しい任意の二つのニールセン核を境界で貼り合わせることで、 $(2, 0, 0)$ 型標識付きリーマン面が得られる。

二つのニールセン核は、定理 5.4 より (6.4), (6.5) と $F(\theta(A_j), \theta(B_j), \theta(B_j A_j)) > 1$ を満たす $\theta(A_j), \theta(B_j), \theta(B_j A_j)$, ($j = 1, 2$) で実解析的に決まる。二つのニールセン核の境界の長さが等しいことは、(6.6) と同値になることが示せる。また、二つのニールセン核の貼り合わせ方は μ で指定できることも示せる。さらに、角度変数の構成の仕方から、 μ は他の六つの角度変数と独立に $(0, \pi)$ の任意の値をとれることも分かる。このようにして、7 個の角度変数から、 $(2, 0, 0)$ 型標識付きリーマン面を実解析的に構成できることが示せ、変数空間も得られる。

Okumura [18] では、フックス群で議論し、結合定理等を用いて証明している。

□

以下、 $T(2, 0, 0)$ の座標付けで用いた長さ変数と角度変数の性質を見ていく。

$(1, 0, 1)$ 型の場合と同様に、 A_j, B_j と $B_j A_j$ の軸の射影は S の hyperelliptic involution J で不変な単純閉測地線となり、 S 上に二つの合同な三角形を決める。これらの三角形は J でうつりあう。特に、三角形の三頂点、つまり、 $p_j, A_j^{-1/2}(p_j)$ と $B_j^{1/2}(p_j)$ の射影は J の不動点となる。よって、6 点 $p_j, A_j^{-1/2}(p_j)$ と $B_j^{1/2}(p_j)$ ($j = 1, 2$) の射影が、 S のワイエルシュトラス点となる。

一次変換の幾何を調べることで、

$$\text{ax}(B_2 A_2 A_1) = L((B_1 A_1)^{-1} B_1^{1/2}(p_1), p_2), \quad \frac{\text{tl}(B_2 A_2 A_1)}{2} = d((B_1 A_1)^{-1} B_1^{1/2}(p_1), p_2),$$

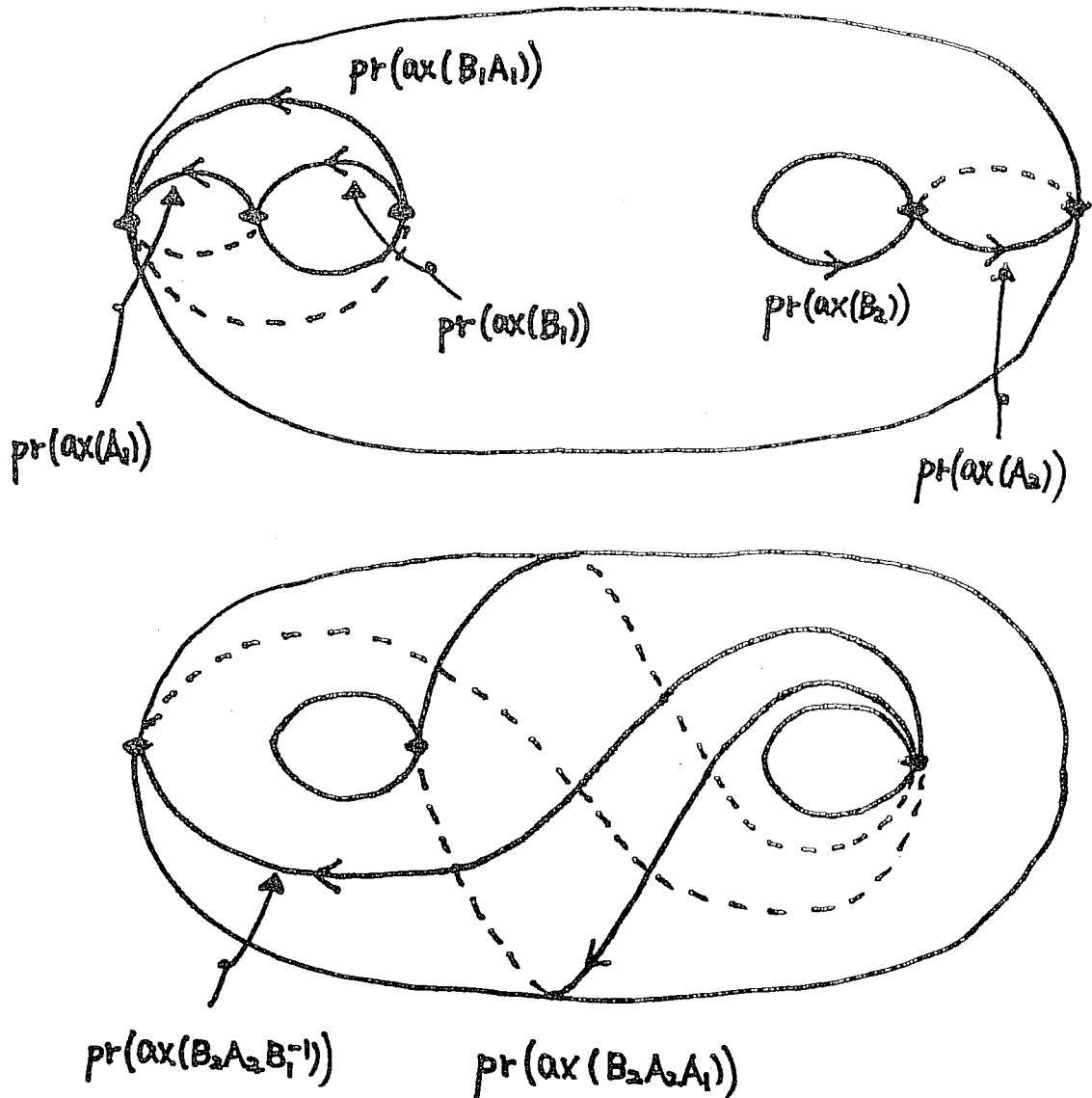
$$\text{ax}(B_2 A_2 B_1^{-1}) = L(A_1^{-1/2}(p_1), p_2), \quad \frac{\text{tl}(B_2 A_2 B_1^{-1})}{2} = d(A_1^{-1/2}(p_1), p_2)$$

が分かり、 $B_2A_2A_1, B_2A_2B_1^{-1}$ の軸の射影も J で不変な単純閉測地線であることが示される。また、定理 6.3 で述べた角度変数は各々 S 上の二つの交角に対応し、 J でうつりあう (図 6.2 を参照せよ)。これらから、次のことが分かる：

- ・長さ変数は S のワイエルシュトラス点から決まる 7 つの単純閉測地線の長さになる。
- ・角度変数は S のワイエルシュトラス点から決まる 6 つの交角と μ になる。

定理 6.3 の証明で見たように、二つの $(1,0,1)$ 型標識付きリーマン面のニールセン核を貼り合わせる方法として、 μ を導入した。 μ はフェンチェル・ニールセンねじれ変数に対応している。

(2,0,0) 型の場合にも、長さ変数と角度変数は J の不変量となる。



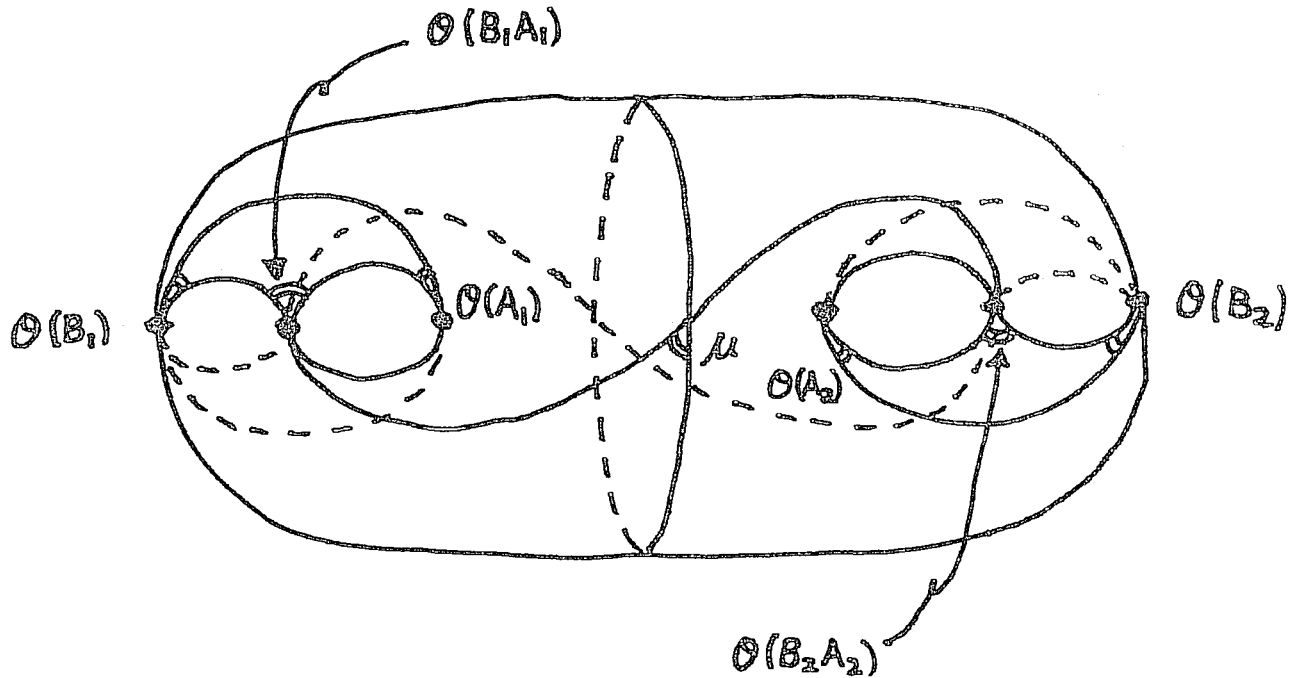


図 6.2

7 一次変換の幾何とトレース不等式

前節まで、フックス群の標準生成元系を考えてきたが、これは各生成元に「作用」の方向と不動点の「位置関係」の条件を与えたものといえる。筆者は、双曲平面に作用する三つの一次変換 X, Y, Z が $ZYX = \text{identity}$ を満たしているとき、これらの「作用」の方向と不動点の「位置関係」が X, Y の行列表現 \tilde{X}, \tilde{Y} のトレース関数

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\tilde{X}) \text{tr}(\tilde{Y}) \text{tr}(\tilde{Y}\tilde{X}), \\ & \text{tr}(\tilde{Y}^{-1}\tilde{X}^{-1}\tilde{Y}\tilde{X}) - 2 \end{aligned}$$

の符号で判定できることを示した。これらの関数値は、 X, Y の行列表現の取り方によらないことに注意せよ。

この節では、 X, Y, Z がすべて双曲型変換になる場合の結果のみを述べよう。次の定理では、不動点の位置関係を軸の配置で説明している。

Theorem 7.1 (Okumura [16]) X, Y, Z を双曲平面に作用する三つの双曲型変換とし、 $ZYX = \text{identity}$ を満たしているとする。このとき、三つの軸 $\text{ax}(X), \text{ax}(Y), \text{ax}(Z)$ の配置は次のどれかとなる：

(a) 三つの軸は互いに素となる。

(b) 三つの軸は平行 (つまり、三つが境界の一点でのみ接する)、または、三つが一致する。

(c) 三つは一点で交わらないが、二つどうしが交わり、一つの三角形を決定する。これから、二つの軸が互いに素、平行、一致、または、交わるなら、三つの軸も同じ状況になる。また、三つの軸の向きは図 7.1 のようになる。さらに、 X, Y の任意の行列表現を \tilde{X}, \tilde{Y} とすると、三つの軸の配置がトレース関数で次のように特徴付けられる：

$$(a_1) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(\tilde{X}) \operatorname{tr}(\tilde{Y}) \operatorname{tr}(\tilde{Y}\tilde{X}) < 0,$$

$$(a_2) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(\tilde{X}) \operatorname{tr}(\tilde{Y}) \operatorname{tr}(\tilde{Y}\tilde{X}) > 0, \quad \operatorname{tr}(\tilde{Y}^{-1}\tilde{X}^{-1}\tilde{Y}\tilde{X}) - 2 > 0,$$

$$(b) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(\tilde{X}) \operatorname{tr}(\tilde{Y}) \operatorname{tr}(\tilde{Y}\tilde{X}) > 0, \quad \operatorname{tr}(\tilde{Y}^{-1}\tilde{X}^{-1}\tilde{Y}\tilde{X}) - 2 = 0,$$

$$(c) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(\tilde{X}) \operatorname{tr}(\tilde{Y}) \operatorname{tr}(\tilde{Y}\tilde{X}) > 0, \quad \operatorname{tr}(\tilde{Y}^{-1}\tilde{X}^{-1}\tilde{Y}\tilde{X}) - 2 < 0.$$

□

Remark 7.2 (a_1) の場合には、

$$\operatorname{tr}(\tilde{Y}^{-1}\tilde{X}^{-1}\tilde{Y}\tilde{X}) > 18.$$

□

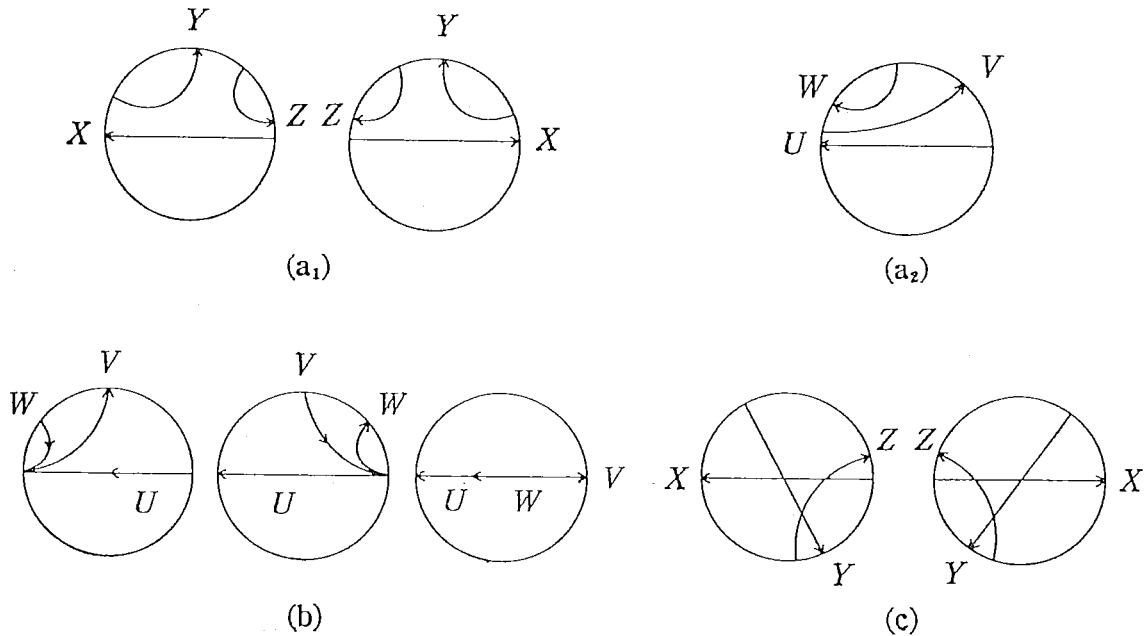


図 7.1 単位円板の場合。ただし、 (U, V, W) は X, Y, Z の任意の順列とする。

8 持ち上げ問題と単純分割閉曲線の特徴付け

一次変換群 $M(\hat{C})$ は、 $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$ と表されるように、 $SL(2, \mathbb{C})$ の射影といわれる。この対応関係により、多くの概念が $SL(2, \mathbb{C})$ から $M(\hat{C})$ に誘導されている。例えば、一次変換のトレースや $M(\hat{C})$ の位相がある。一次変換 g の二つの行列表現は g の二つの持ち上げともいわれる。

タイヒミュラー空間の座標付けを考察中に、 $M(\hat{C})$ の部分群 G の持ち上げ問題を思いついた。これは、「 G の各元にたいし、二つの行列表現（持ち上げ）の一方を上手に選ぶと、これら全体が G と同型な行列群になるか」という問題である。できるとき、 G は持ち上げ可能といわれる。この問題は 20 世紀初めから、多くの人達により考察されている有名な問題であることが分かった。例えば、Kra [10] を参照せよ。

G がフックス群の場合には、次のような結果が得られている。

Theorem 8.1 (Culler [1], Kra [10], Okumura [16], etc.) 有限生成フックス群にたいしては、持ち上げ可能であることと、位数 2 の楕円型変換を含まないことは同値となる。

□

明らかに、群の生成元の持ち上げを指定することで、群の持ち上げは決定される。楕円型や放物型変換が含まれているフックス群の場合にも、標準生成元系は定義される（例えば、Okumura [12] を参照）。この標準生成元系に注目すると、次のことが示せる：

- ・群の持ち上げの取り方によらず、楕円型変換の像は唯一となる。特に、標準生成元系の楕円型生成元はトレースが負の行列表現にうつる。
- ・一般には、群の持ち上げを取りかえると、放物型変換の像は変化する。

このように群を持ち上げる際、楕円型変換は制限を受ける。楕円型変換と放物型変換を区別するために、次の定義を導入する。

Definition 8.2 フックス群 G は、種数 g で r 個の分岐点を持つコンパクト・リーマン面から s 個の点と m 個の閉円板を除いて得られる面を表現するとき、 (g, r, s, m) 型といわれる。また、このようなリーマン面も (g, r, s, m) 型といわれる。

□

フックス群の生成元の持ち上がり方を調べることで、次の結果がただちに得られる。

Theorem 8.3 (Okumura [16]) G を位数 2 の楕円型変換を含まない有限生成フックス群とする。このとき、 G の持ち上げの個数は、

- (i) G が $(g, r, 0, 0)$ 型 のとき、 2^{2g} 個、
- (ii) G が (g, r, s, m) 型 ($s + m \geq 1$) のとき、 $2^{2g+s+m-1}$ 個、
となる。

□

持ち上げの性質を調べていると、リーマン面上の単純閉曲線が「分割している」という位相的性質が、このリーマン面を表現するフックス群の解析的性質から判断できることが分かった。ただし、(連結な) 曲面上の単純分割閉曲線とは、この曲面を二つの連結集合に分け、境界成分または一点にホモトピックでない単純閉曲線のことである。

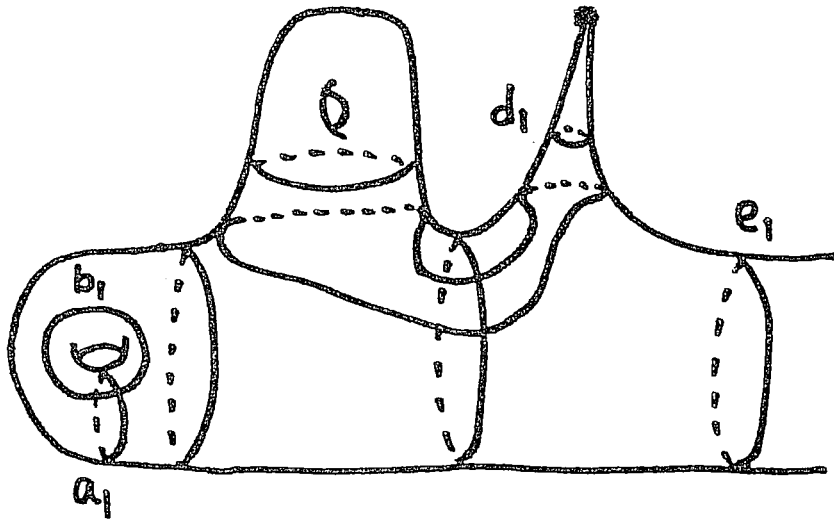


図 8.1 a_1, b_1, d_1, e_1 以外は単純分割閉曲線。

結果を述べるために、いくつか設定を行う： S を双曲型リーマン面とし、 L を S 上の閉曲線とする。 S を表現する (任意の) フックス群を G とする。ここで、 G が持ち上げ可能、つまり、 S に分岐点があればその位数はすべて奇数と仮定する。また、 g_L を L に対応する G の (任意の) 元とする。

このとき、次の定理が得られる。

Theorem 8.4 (Okumura [16]) S をコンパクトとする。このとき、 L が S 上の単純分割閉曲線なら、 G の持ち上げによる g_L の像は、 G の持ち上げの取り方によらず唯一で、トレースが負の行列表現となる。

□

この定理は次のように述べることもできる。

Corollary 8.5 (Okumura [16]) S をコンパクトとする。このとき、 G の適当な持ち上げにより、 g_L が正のトレースを持つ行列表現にうつるなら、 L は単純分割閉曲線でない。

□

次に、 S がコンパクトでない場合を考える。このときには、期待に反し、次の主張が成り立つ。

Lemma 8.6 (Okumura [16]) S を (g, r, s, m) 型 ($s + m \geq 2$) とする。このとき、単純分割閉曲線のなかには、 G の適当な持ち上げにより、正のトレースを持つ行列表現にうつるものがある。

□

しかし、コンパクトでない場合にも、次のように持ち上げを制限すると、コンパクトの場合と同じ主張が成り立つ。

Theorem 8.7 (Okumura [16]) S を (g, r, s, m) 型 ($s + m \geq 1$) とする。 S のパンクチャーと穴に対応する G の標準生成元系の生成元は $s + m$ 個ある。これらの生成元をすべて負のトレースを持つ行列表現にうつす G の持ち上げのみを考える。このような G の持ち上げは 2^{2g} 個ある。 G の持ち上げをこのように制限すると、定理 8.4 と系 8.5 の主張が成り立つ。また、 G の持ち上げの制限をこれ以上緩和すると、定理 8.4 と系 8.5 の主張は成り立たない。

□

参考文献

- [1] M. Culler, Lifting representations to covering groups, Adv. in Math., 59(1986), 64-70.
- [2] G. Faltings, Real projective structures on Riemann surfaces, Compos. Math., 48(1983), 223-269.
- [3] R. Fricke and F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, B. G. Teubner, Leipzig, 1926.
- [4] N. Hawley and M. Schiffer, Half-order differentials on Riemann surfaces, Acta Math., 115(1966), 199-236.

- [5] L. Keen, Intrinsic moduli on Riemann surfaces, *Ann. of Math.*, 84(1966), 404-420.
- [6] L. Keen, On Fricke moduli, in *Advances in the Theory of Riemann Surfaces*, (ed. L. V. Ahlfors et al.), *Ann. Math. Studies* 66, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971, 205-224.
- [7] L. Keen, A correction to "On Fricke moduli", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 40(1973), 60-62.
- [8] L. Keen, A rough fundamental domain for Teichmüller spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(1977), 1199-1226.
- [9] Y. Komori, Semialgebraic description of Teichmüller space, preprint.
- [10] I. Kra, On lifting of Kleinian groups to $SL(2, \mathbb{C})$, in *Differential Geometry and Complex Analysis* (Rauch, H. E. Memorial Volume), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1985, 181-193.
- [11] J. Milnor, On the existence of a connection with curvature zero, *Comment. Math. Helvetici*, 32(1958), 215-223.
- [12] Y. Okumura, Global real analytic coordinates for Teichmüller spaces, Doctor's Thesis, Kanazawa Univ., Kanazawa, 1989.
- [13] Y. Okumura, On the global real analytic coordinates for Teichmüller spaces, *J. Math. Soc. Japan*, 42(1990), 91-101.
- [14] Y. Okumura, Global real analytic length parameters for Teichmüller spaces, *Hiroshima Math. J.*, 26(1996), 165-179.
- [15] Y. Okumura, Parametrizations of Teichmüller spaces, in *XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium*, (ed. I. Laine and O. Martio), Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1996, 181-190.
- [16] Y. Okumura, Lifting problem and a characterization of simple dividing loops on Riemann surfaces, (Japanese), in *Analysis of Discrete Groups*, (ed. Y. Okumura), *RIMS Kokyuroku* 967, Research Institute for Mathematical Sciences Kyoto Univ., Kyoto, 1996, 142-154.
- [17] Y. Okumura, Global real analytic length parameters and angle parameters for Teichmüller spaces, Doctor's Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, 1996.

- [18] Y. Okumura, Global real analytic angle parameters for Teichmüller spaces, J. Math. Soc. Japan, 49(1997), 213-229.
- [19] Y. Okumura, Global real analytic angle parameters for Teichmüller spaces II, in preparation.
- [20] H. Petersson, Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen III, Math. Ann., 115(1938), 518-572.
- [21] K. Saito, Algebraic representations of Teichmüller space, Kodai Math. J., 17(1994), 609-626.
- [22] P. Schmutz, Die Parametrisierung des Teichmüllerraumes durch geodätische Längenfunktionen, Comment. Math. Helv., 68(1993), 278-288.
- [23] M. Seppälä and T. Sorvali, On geometric parametrization of Teichmüller spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 10(1985), 515-526.
- [24] M. Seppälä and T. Sorvali, Parametrization of Möbius groups acting in a disk, Comment. Math. Helv., 61(1986), 149-160.
- [25] M. Seppälä and T. Sorvali, Parametrization of Teichmüller spaces by geodesic length functions, in Holomorphic Functions and Moduli II (ed. D. Drasin et al.), Mathematical Sciences Research Institute Publications 11, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, 1988, 267-284.
- [26] M. Seppälä and T. Sorvali, Traces of commutators of Möbius transformations, Math. Scand., 68(1991), 53-58.
- [27] M. Seppälä and T. Sorvali, Geometry of Riemann Surfaces and Teichmüller Spaces, Mathematics Studies 169, North-Holland, Amsterdam, London, New York, Tokyo, 1992.
- [28] C. L. Siegel, Über einige Ungleichungen bei Bewegungsgruppen in der nicht-euklidischen Ebene, Math. Ann., 133(1957), 127-138.
- [29] S. A. Wolpert, On the symplectic geometry of deformations of a hyperbolic surface, Ann. of Math., 117(1983), 207-234.
- [30] S. A. Wolpert, Geodesic length functions and the Nielsen problem, J. Differential Geom., 25(1987), 275-296.

**THE EXPONENT EXPANSION OF THE JONES
REPRESENTATION AND THE LOWER CENTRAL SERIES OF
THE TORELLI GROUP OF GENUS 2**

YASUSHI KASAHARA

In his famous paper on polynomial invariants of links, V.F.R. Jones has constructed a representation of the mapping class group of the closed surface of genus 2 [Ann. of Math. 126(1987), 335-388]. It is a linear representation over the integral Laurent polynomials $Z[t, t^{-1}]$, and comes from a certain generically irreducible component of the A_5 type Iwahori-Hecke algebra representation of the 6-string braid group.

In this talk, we report on our continuing study of this representation. We consider a series of reductions of the Jones representation obtained by using the Taylor expansion of $t = \exp h$ and reducing the parts of degrees higher than a given one. The k -th reduction vanishes on the k -th term of the lower central series of the Torelli group, and therefore the series of the reductions naturally induces a representation of the graded quotients of the lower central series of the Torelli group. In particular, the first non-trivial reduction, up to degree 1, gives an abelian quotient of the Torelli group, and this quotient is a Z -free lift of our previous quotient, obtained by using the specialization $t = \sqrt{-1}$.

KOCHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, TOSAYAMADA, KOCHI, 782 JAPAN
E-mail address: kasahara@ele.kochi-tech.ac.jp

量子逆元とブレイドモノドロミー

鎌田 聖一

大阪市立大学理学部

2次元ブレイドのブレイドモノドロミーの標準形を定義しようとするとき、つぎのような問題が起こります。ブレイドモノドロミーは局所モノドロミーの有限列で記述できますが、この有限列はユニークではなく、ある種の基本変形を法にして定まるものです。この基本変形にはブレイドの共役が現われますが、ブレイドの標準形（たとえば Garside 標準形）は共役に関してうまく計算できません。

ところが昨年、松本幸夫先生が「量子逆元」という概念を提唱されました。点抜き球面の写像類群において共役を求めるときに、最も初歩の段階で現われるものです。これはブレイドモノドロミーの基本変形に利用できると思い早速話に加わった次第です。

「量子逆元」の定義、性質、計算方法については、松本先生の手稿で説明されていると思いますので、ここではブレイドモノドロミーとの関係について簡単に述べたいと思います。なお、松本先生は、「量子逆元」を点抜き球面の写像類群で考えられていますが、ブレイド群でも定義ができます (§4)。本質的にはまったく同じです。

§1 ブレイド

D を 2 次元円板とし、 $K = \{z_1, \dots, z_m\}$ を $D - \partial D$ 上の m 個の点集合とする。 ∂D 上恒等写像かつ $h(K) = K$ をみたす同相写像 $h: D \rightarrow D$ をブレイド写像 (Artin の同相写像) という。ブレイド写像のイソトピー同値類全体がつくる群を $B_m^*(D, K)$ で表す。(ただし、2つのブレイド写像の積 (合成) は左側が先とみなす。)

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -T_EX

I を 1 次元円板 (線分) とする. $D \times I$ 内に埋め込まれた 1 次元多様体 β が

- (1) $pr_2|_{\beta} : \beta \rightarrow I$ が被覆写像,
- (2) $\partial\beta = K \times \partial I$

をみたすとき, β を ((D, K) に関する) 幾何的ブレイドという. (ここで pr_1 や pr_2 は $D \times I$ の各成分への射影を表す.) 2 つの幾何的ブレイド β_1, β_2 が同値とは, つぎをみたす全同位 $g_t : D \times I \rightarrow D \times I$ ($t \in [0, 1]$) が存在するときをいう.

- (1) $g_1(\beta_1) = \beta_2$
- (2) 各 g_t は $D \times \partial I$ 上で恒等的.
- (3) 各 g_t は fiber-preserving (すなわち, $pr_2 \circ g_t = \underline{g}_t \circ pr_2$).

幾何的ブレイドの同値類をブレイドという. (しばしばブレイドと代表元である幾何的ブレイドは区別しないで用いられる.) ブレイド全体がつくる群をブレイド群といい, $B_m(D, K)$ で表す. $B_m(D, K)$ と $B_m^*(D, K)$ には自然な同一視がある.

1 次元円板 I を 2 次元円板 B におき直したものが, 2 次元ブレイドである. $D \times B$ 内に埋め込まれた 2 次元多様体 F が

- (1) $pr_2|_F : F \rightarrow B$ が分岐被覆写像,
- (2) $\partial F = K \times \partial B$

のとき, F を (B 上の) 2 次元ブレイドという. 2 つの 2 次元ブレイド F_1, F_2 が同値とは, つぎをみたす全同位 $g_t : D \times B \rightarrow D \times B$ ($t \in [0, 1]$) が存在するときをいう.

- (1) $g_1(F_1) = F_2$
- (2) 各 g_t は $D \times \partial B$ 上で恒等的.
- (3) 各 g_t は fiber-preserving (すなわち, $pr_2 \circ g_t = \underline{g}_t \circ pr_2$).

(B 上の) 2 次元ブレイドの同値類全体を $B_m(B)$ で表す.

§2 ブレイドモノドロミー

S を連結な 2 次元多様体, $\Sigma = \{y_1, \dots, y_n\}$ を $S - \partial S$ 内の n 個の点集合とする. 基点 y_0 を $S - \Sigma$ にとる. 基本群 $\pi_1(S - \Sigma, y_0)$ からある群 G への準同型 $f : \pi_1(S - \Sigma, y_0) \rightarrow G$ を (S, Σ) 上の G モノドロミーという.

量子逆元とブレイドモノドロミー

G が対称群（または置換群）のとき普通の意味でのモノドロミーであり、 G がブレイド群のときブレイドモノドロミーという。

例 1. \overline{C} を \mathbb{CP}^2 内の代数曲線とする。射影 $P: \mathbb{CP}^2 - O \rightarrow \mathbb{CP}^1$ が \overline{C} について一般的になるように点 O を $\mathbb{CP}^2 - \overline{C}$ にとる。つまり、 P の制限写像 $p: \overline{C} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ は分岐被覆写像。 Σ' を \overline{C} の特異点集合、 Σ を \mathbb{CP}^1 での像とする。このとき、

$$\rho: \pi_1(\mathbb{CP}^1 - \Sigma, y_0) \rightarrow B_n(P^{-1}(y_0), p^{-1}(y_0))/\text{center}$$

は、ブレイドモノドロミーである。ただし、この場合は本来の円板上のブレイド群でなく、「開円板上のブレイド群」である。座標をうまくとって、 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ について、普通のブレイドモノドロミー

$$\rho: \pi_1(\mathbb{C} - \Sigma, y_0) \rightarrow B_n(P^{-1}(y_0), p^{-1}(y_0)) \cong B_n(D, K)$$

を考えることができる。（最後の同型は自然なものではない。）

例 2. F を $D \times B$ 内の 2 次元ブレイドとする。定義より、 $P = pr_2: D \times B \rightarrow B$ の制限 $p: F \rightarrow B$ は分岐被覆写像。 Σ' を F の特異点集合、 Σ を B での像とする。

$$\rho: \pi_1(B - \Sigma, y_0) \rightarrow B_n(P^{-1}(y_0), p^{-1}(y_0))$$

はブレイドモノドロミーである。とくに、 y_0 を ∂B 上にとれば、

$$\rho: \pi_1(B - \Sigma, y_0) \rightarrow B_n(D, K)$$

を得る。

$f: \pi_1(B - \Sigma, y_0) \rightarrow G$ を (B, Σ) 上の G モノドロミーとする。 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ が (B, Σ) についての Hurwitz arc system (good ordered system of arcs) とは、各 γ_i ($i = 1, \dots, n$) は B 上の単純弧であり、 Σ との交わりはその 1 つの端点で、もう一つの端点は y_0 、そして、 y_0 のまわりでは $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ がこの順番で現われているものである。このような Hurwitz arc system は基本群 $\pi_1(B - \Sigma, y_0)$ の生成元の列 Hurwitz generator system (good ordered system of generators) を定める。この生成元の列

に f の値を対応させて, G の元からなる有限列 (g_1, \dots, g_n) を得る. これと Hurwitz arc system の情報があれば, 完全にもとの G モノドロミー f が復元できる.

基本変形とは

$$g_i \mapsto g_{i+1}, \quad g_{i+1} \mapsto g_{i+1}^{-1} g_i g_{i+1}, \quad g_j \mapsto g_j \quad (j \neq i, i+1)$$

またはこの逆操作のことである. このような基本変形を有限回繰り返しても G モノドロミーは同値である. これは Hurwitz arc system のとり方の差に対応する.

仮に G の各元に標準形が定義されていても, 共役元について標準形が直ちに計算できなければ役に立たないのである.

§3 重み付き単純弧の RACK

D を 2 次元円板, $K = \{z_1, \dots, z_m\}$ を $D - \partial D$ 上の m 個の点集合とする. $D - \partial D$ 上の単純弧 α で $\alpha \cap K = \partial\alpha$ となるようなものを考える. α に「重み」がついているとは, ある 0 でない整数 (重み) が指定されていることである. このような「重み」がついた単純弧 α 全体を $A(D, K)$ とする. $A(D, K)$ をイソトピー同値なもので割った集合を $A(D, K)$ とする. $A(D, K)$ の元 $a = ([\alpha], n)$ に対して, $n > 0$ ($n < 0$) なら正の向き (負の向き) に α にそってディスクツイストを n 回 ($-n$ 回) 合成した写像を対応させて, 写像

$$\Lambda : A(D, K) \rightarrow B_m^*(D, K)$$

が定まる. $A(D, K)$ の元 a, b に対して, $A(D, K)$ の元 a^b をつぎの様に定める.

$$\Lambda(a^b) = \Lambda(b)^{-1} \Lambda(a) \Lambda(b)$$

これにより, $A(D, K)$ には Rack の構造が入る. $A(D, K)$ の部分集合で重みが n であるものを $A_n(D, K)$ と表すと, $a \in A_n(D, K), b \in A(D, K)$ に対し, $a^b \in A_n(D, K)$ なので $A_n(D, K)$ は「正規部分 Rack」である.

例 1. 代数曲線のブレイドモノドロミーにおいて, 局所モノドロミーは $A_n(D, K)$ ($n \in \{1, 2, 3\}$) の元である. $n = 1$ のとき, 局所モノドロミーは branch point の

量子逆元とブレイドモノドロミー

まわりの局所モノドロミーである． $n = 2$ のとき，node に対応し， $n = 3$ のとき，cusp に対応する．

例 2. F を「単純」2次元ブレイドと仮定する．このとき，ブレイドモノドロミーの局所モノドロミーは $A_n(D, K)$ ($n \in \{1, -1\}$) の元である．また，ここでは定義を与えないが「単純特異」2次元ブレイドのときには，局所モノドロミーは $A_n(D, K)$ ($n \in \{1, 2, -1, -2\}$) の元である．

これらの例では， $A_n(D, K)$ ($n \in \{1, 2, 3, -1, -2\}$) の元についてのみ標準形を定義し，そこでの Rack の作用を求めれば十分である．

§4 $A_1(D, K)$ と量子逆元

$A_1(D, K)$ のなかでも端点が z_1, z_2 であるものを $A_{\{12\}}(D, K)$ で表す． (D, K) に関して Hurwitz arc system $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ を固定する．(ただし， $\partial\gamma_i = \{z_i, z_0\}$ ，基点 z_0 は ∂D 上にとる．) またこれに付随した $\pi_1(D - K, z_0)$ の Hurwitz generator system を x_1, \dots, x_m とする． $\pi_1(D - K, z_0)$ は自由群 $F\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ である． $a = ([\alpha], 1) \in A_{\{12\}}(D, K)$ に対して， α に z_2 から z_1 に向かう向きをいれると約束すれば，両側剰余類

$$[\alpha] \in \langle x_2 \rangle \backslash F\langle x_1, \dots, x_m \rangle / \langle x_1 \rangle$$

が定まる．つまり，

$$A_{\{12\}}(D, K) \rightarrow \langle x_2 \rangle \backslash F\langle x_1, \dots, x_m \rangle / \langle x_1 \rangle$$

が定義できる．さらに x_1 が生成する正規部分群で割って，

$$\rho : A_{\{12\}}(D, K) \rightarrow \langle x_2 \rangle \backslash F\langle x_2, \dots, x_m \rangle$$

を得る．

定理. 写像 $\rho : A_{\{12\}}(D, K) \rightarrow \langle x_2 \rangle \backslash F\langle x_2, \dots, x_m \rangle$ は全単射である．

z_1 と z_2 を端点とし, Hurwitz arc system $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ とは端点のみで交わるような D 上の単純弧を α_{12} とする. $a = ([\alpha], 1) \in A_{\{12\}}(D, K)$ に対して, α を α_{12} にそって正のディスクツイストをおこない得られた単純弧を $\tau(\alpha)$ と表し,

$$\tau : A_{\{12\}}(D, K) \rightarrow A_{\{12\}}(D, K)$$

を

$$\tau([\alpha], 1) = ([\tau(\alpha)], 1)$$

により定義する. このとき, pre-quantum inverse map

$$I^{\text{pre}} : \langle x_2 \rangle \backslash F \langle x_2, \dots, x_m \rangle \rightarrow \langle x_2 \rangle \backslash F \langle x_2, \dots, x_m \rangle$$

が $I^{\text{pre}} = \rho \circ \tau \circ \rho^{-1}$ により得られる.

x_2 に関する指数和を保つように調整して, quantum inverse map I が定義される.

§5 まとめと課題

§4 に述べたように $A_{\{12\}}(D, K)$ の元については標準形が得られました. さらに, $A_{\{12\}}(D, K)$ の元による共役は quantum inverse map I を用いて再び標準形にできます. しかし一般の場合 ($A_n(D, K)$) はさらに工夫が必要になります. $A_1(D, K)$ の場合も代数的に計算する方法が見つかりましたがまだ実用的ではありません. 今後の課題です.

最後に2次元ブレイドと松本先生が研究されているレフシェツ・ファイバー空間の関係ですが, degree $2n$ の2次元ブレイドにおいてファイバーを球面に拡張し, また底空間を2次元円板 B でなくリーマン面 S とします. この2重分岐被覆は, 種数が $n-1$ のリーマン面をファイバーにもつ S 上のレフシェツ・ファイバー空間になります. もちろんすべてのレフシェツ・ファイバー空間がこのようにして得られる訳ではありません. 逆に, 2次元ブレイドには degree が奇数のものがあり, レフシェツ・ファイバー空間を対合写像で割る方法でこれらを得ることはできません. 2次元ブレイドとレフシェツ・ファイバー空間の共通部分は重要な, 美しいクラスのようなのですが, よくわかっていません.

また2次元ブレイドの定義の ∂F の条件を自明なブレイドから1回ひねりのブレイドに変更すれば, \mathbb{CP}^2 の中の2次元ブレイドが定義できます. これは代数曲線の拡張になっています.

REFERENCES

- [1] E. Artin, *Theory of braids*, Ann. of Math. **48** (1947), 101–126.
- [2] I. Berstein and A. L. Edmonds, *On the construction of branched coverings of low-dimensional manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **247** (1979), 87–124.
- [3] I. Berstein and A. L. Edmonds, *On the classification of generic branched coverings of surfaces*, Illinois J. Math. **28** (1984), 64–82.
- [4] J. S. Birman, *On braid groups*, Commun. Pure Appl. Math. **22** (1969), 41–72.
- [5] J. S. Birman, *Mapping class groups*, Commun. Pure Appl. Math. **22** (1969), 213–238.
- [6] J. S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Ann. Math. Studies 82, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1974.
- [7] R. Fenn, C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), 343–406.
- [8] K. Habiro, S. Kamada, and Y. Matsumoto, 準備中.
- [9] S. Kamada, *On braid monodromies of non-simple braided surfaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **120** (1996), 237–245.
- [10] S. Kamada, *Surfaces in 4-space: A view of normal forms and braidings*, Lectures at Knots 96 (ed. S. Suzuki), World Scientific Publishing Co., 1997, pp. 39–71.
- [11] Y. Matsumoto, 写像類群の共役公式と「量子逆元」, 研究集会報告集「結び目理論と様々な数学の絡み」(1996年12月大阪市立大学文化交流センター), 1997年2月.
- [12] Y. Matsumoto, *On quantum inverse in a free group*, The Proceedings of the fifth Korea-Japan School of Knots and Links, held in Taejon, Korea, 1997, to appear.
- [13] B. G. Moishezon, *Stable branch curves and braid monodromies*, Algebraic Geometry, Lect. Notes in Math. 862, 1981, pp. 107–192.
- [14] L. Rudolph, *Algebraic functions and closed braids*, Topology **22** (1983), 191–202.
- [15] L. Rudolph, *Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), 1–37.
- [16] L. Rudolph, *Some topologically locally-flat surfaces in the complex projective plane*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), 592–599.
- [17] L. Rudolph, *Special positions for surfaces bounded by closed braids*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 93–133.

種数 2 の曲線族から得られる周期写像

KOMATU Makoto (小松 信) e-mail: komatu@kurims.kyoto-u.ac.jp

概要

A_4 型 curve singularity の変形のパラメータ空間の \mathbf{C}^* -bundle としての構造を、周期写像を使うことにより解明する。(まだ出来ていない。)

1 Introduction.

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &:= -y^2 + x^5 + t_2 x^3 + t_3 x^2 + t_4 x + t_5, \\ \Xi &:= \{(x, y, t) \in \mathbf{C}^2 \times S \mid F(x, y, t) = 0\}, \\ S = S_{A_4} &:= \mathbf{C}^4 (\ni t = (t_2, t_3, t_4, t_5)) \end{aligned}$$

とおく。 Ξ は A_4 型 curve singularity $y^2 = x^5$ の versal deformation (略して変形) の空間、 S はそのパラメータ空間と呼ばれる。 Ξ 及び S には

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (x, y, t) &:= (\lambda^2 x, \lambda^5 y, \lambda \cdot t), \\ \lambda \cdot t &:= (\lambda^4 t_2, \lambda^6 t_3, \lambda^8 t_4, \lambda^{10} t_5) \quad (\lambda \in \mathbf{C}^*) \end{aligned}$$

によって \mathbf{C}^* -action が定義される。この作用により S は広義の \mathbf{C}^* -bundle (の全空間) と見なされる。我々の目標はこの \mathbf{C}^* -bundle の正体をもとめることである。つまり次の問題 (及び後述の問題 (4.2)) を考える。

1.1 (問題) A_4 型 curve singularity の変形のパラメータ空間の \mathbf{C}^* -bundle としての構造を解明せよ。

他の A_n 型 curve singularity に関しては A_1 型 (自明)、 A_2 型 (楕円 modular 形式) の場合だけ知られている。そこで非自明な例つまり A_2 型のときの話の真似をして A_4 型の場合を調べることにする。 n が奇数 (≥ 3) のときの A_n 型は A_2 型のときの話を単純に真似できない事情があり、どうしたらいいかわからない。また更に別の特異点に対してもこの問題はあるのだが私は知らない。 A_2 型のときには周期写像を使って保型形式の枠組をあてはめた (cf.(2.1))。次節でその枠組を説明する。

2 保型形式の枠組

複素多様体 X に群 G が不連続に作用していて、更に X 上の G に関する保型因子 j が与えられれば保型形式というものを考えることが出来る。ところで X に G が作用しているとき次のふたつ

- 保型因子 j を与えること、
- $\mathbf{C}^* \times X$ への G の作用を projection map $\mathbf{C}^* \times X \rightarrow X$ と equivariant になるように、かつ \mathbf{C}^* -action と可換になるように与えること、

は同じことである。(j が与えられたとき、 $\mathbf{C}^* \times X$ への G の作用は

$$\sigma : (\lambda, x) \mapsto (j(\sigma, x)^{-1}\lambda, \sigma(x)) \quad (\sigma \in G)$$

によって定義する。) このとき関数 $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^* \times X)$ が G 不変だとすると、

$$f(j(\sigma, x)^{-1}\lambda, \sigma(x)) = f(\lambda, x), \quad (\forall \sigma \in G, \forall x \in X) \quad (1)$$

が成り立つ。よって、ここで更に $f \in \mathcal{O}(X)[\lambda, \lambda^{-1}]$ だとすると、この f を

$$f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \lambda^k f_k \quad (\text{finite sum}) \quad (\text{where } f_k \in \mathcal{O}(X))$$

と表示すると、

$$\sum_k j(\sigma, x)^{-k} \lambda^k f(\sigma(x)) = \sum_k \lambda^k f_k$$

より

$$f_k(\sigma(x)) = j(\sigma, x)^k f_k(x) \quad (\forall \sigma \in G, \forall x \in X, \forall k)$$

が得られる。つまり、粗く言うと大体

$$\boxed{X \text{ 上の } (G, j)\text{-保型形式環}} \cong \boxed{\mathbf{C}^* \times X \text{ 上の } G\text{-不変式環}} \cong \boxed{(\mathbf{C}^* \times X)/G \text{ 上の関数環}} \quad (2)$$

と見なせる。空間 Y が或る \mathbf{C}^* -bundle の全空間のときこの Y に対し

$$Y \cong (\mathbf{C}^* \times X)/G \quad (3)$$

と見做せるような X 、 G を与えることが出来れば、そこで得られる j は Y の変換関数系を表す。そして Y に associate する line bundle の切断は X 上の (G, j) -保型形式と見なされる。

2.1 (例) A_2 型 ($y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$) の場合

この場合、 $S_{A_2} := \mathbf{C}^2$ 、 $D_{A_2} := \{g \in S_{A_2} | g_2^3 - 27g_3^2 = 0\}$ 、 $Y := S_{A_2} - D_{A_2}$ とおく。 Y への \mathbf{C}^* -action は、 $\lambda : g_i \mapsto \lambda^{2i} g_i$ ($\lambda \in \mathbf{C}^*$; $i = 2, 3$) と定義する。このとき (多価) 写像

$$Y \ni g \mapsto \left(\int_{A(g)} \frac{dx}{y}, \int_{B(g)} \frac{dx}{y} \middle/ \int_{A(g)} \frac{dx}{y} \right) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{H}$$

により (このとき $G = SL(2, \mathbf{Z})$) $Y \cong (\mathbf{C}^* \times \mathbf{H})/SL(2, \mathbf{Z})$ が成立し、 g_2, g_3 の、 \mathbf{H} 上の保型形式としての表示 (楕円モジュラー形式) が得られる。

3 問題の定式化

まずいくつか定義を述べる。

$$\begin{aligned} \Delta : = & 3125t_5^4 - 3750t_2t_3t_5^3 + 2000t_2t_4t_5^2 + 2250t_3^2t_4t_5^2 - 900t_2^3t_4t_5^2 + 825t_2^2t_3^2t_5^2 \\ & + 108t_2^5t_5^2 - 1600t_3t_4^3t_5 + 560t_2^2t_3t_4^2t_5 - 630t_2t_3^3t_4t_5 - 72t_2^4t_3t_4t_5 + 108t_3^5t_5 \\ & + 16t_2^3t_3^3t_5 + 256t_4^5 - 128t_2^2t_4^4 + 144t_2t_3^2t_4^3 + 16t_2^4t_4^3 - 27t_3^4t_4^2 - 4t_2^3t_3^2t_4^2 \\ & (x \text{ の多項式 } F(x, 0, t) \text{ の判別式}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D = D_{A_4} : &= \{t \in S \mid \Delta(t) = 0\}, \\
\pi : &\Xi \ni (x, y, t) \mapsto t \in S, \\
X_t : &= \pi^{-1}(t), \\
A : &= \{M \circ \tau \mid M \in Sp(4, \mathbf{Z}), \tau \in \mathbf{H}_2, \tau \text{ は対角行列}\}, \\
\mathbf{H}_2^0 : &= \mathbf{H}_2 - A \quad (\text{但し } \mathbf{H}_2 \text{ は genus 2 の Siegel 上半空間}).
\end{aligned}$$

前節で述べた Y として $S-D$ を採る。そして $\mathbf{C}^* \times X$ の候補として後述の monodromy covering $\widehat{S-D}$ に注目する。 $(A_2 \text{ 型のときにはこれでうまくいった。})$ $S-D$ の点 t_0 をひとつ採る。これは $S-D$ の基本群の基点として使う。自然な projection $\Xi - \pi^{-1}(D) \rightarrow S-D$ の局所自明性により $H_1(X_{t_0}, \mathbf{Z})$ には基本群 $\pi_1(S-D, t_0)$ が作用する。しかもこの作用は $H_1(X_{t_0}, \mathbf{Z})$ の交差形式 I を保存する。こうしていわゆる monodromy 表現

$$\rho : \pi_1(S-D, t_0) \rightarrow \text{Aut}(H_1(X_{t_0}, \mathbf{Z}), I)$$

が得られる。但し $\text{Aut}(H_1(X_{t_0}, \mathbf{Z}), I)$ は $H_1(X_{t_0}, \mathbf{Z})$ の自己同型で I を保存するものの全体である。 $\Gamma := \rho(\pi_1(S-D, t_0))$ を monodromy group と呼ぶことにする。 X_{t_0} 上で $H_1(X_{t_0}, \mathbf{Z})$ の basis を **Figure-1** の様に取り fix すると、これにより同型

$$\text{Aut}(H_1(X_{t_0}, \mathbf{Z}), I) \cong Sp(4, \mathbf{Z})$$

が得られる。この同型対応により Γ は $Sp(4, \mathbf{Z})$ の部分群と見なせる。表現 ρ から得られる $S-D$ の monodromy covering を $\sigma : \widehat{S-D} \rightarrow S-D$ と書く。そして周期写像を次のように定義する。

$$P : \widehat{S-D} \ni h \mapsto \left(\int_{A_j(h)} \frac{x^{i-1} dx}{y} \right)_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3,4}} \in \mathbf{C}^{2 \times 4}.$$

但し $A_1(h), A_2(h), A_3(h)(= B_1(h)), A_4(h)(= B_2(h))$ は $H_1(X_{\sigma(h)}, \mathbf{Z})$ の symplectic basis で、 h に「連続的」に依存するものとする (local system)。 (ある $h_0 \in \sigma^{-1}(t_0)$ で **Figure-1** のようにとっておく。) 更に

$$\varphi : \text{Image}(P) \ni (\Omega_A \Omega_B) \mapsto \Omega_A^{-1} \Omega_B \in \mathbf{H}_2$$

と定義する。

4 現在までの結果 (1)

$\widehat{S-D}$ には monodromy group と \mathbf{C}^* が作用し、その両者の作用は互いに可換である。更にこの \mathbf{C}^* は $\widehat{S-D}$ には fixed point free に作用することがわかり $\widehat{S-D}$ は厳密な意味での \mathbf{C}^* -bundle の構造を持つ。ところで A_2 型の場合、 $S_{A_2} \widehat{-D}_{A_2}$ は周期写像により自明な \mathbf{C}^* -bundle $\mathbf{C}^* \times \mathbf{H}$ と同型になる。 A_4 型ではどうかというと、実は次が成り立つ。

4.1 (補題) \mathbf{C}^* -bundle としての同型

$$\widehat{S-D} \cong \mathbf{C}^* \times \mathbf{H}_2^0 \quad (4)$$

が成り立つ。

(証明の概略) まず Rosenhain の公式 (10) から得られる関数 α_i (cf. (12)) を使って H_2^0 から $S-D$ への写像を定義し、次にその写像を H_2^0 から $\widehat{S-D}$ への写像に lift することによって $\widehat{S-D}$ の大域切断をもとめた。
(証明の概略終)

これより件の枠組における X として H_2^0 をとればいい、ということがわかった。よって (2)、(3) より $S-D$ 上の関数は H_2^0 上の (Γ, j) -保型形式の幾つかの和と見なされる。とくに変形のパラメータ t_i ($2 \leq i \leq 5$) は weight が $2i$ の保型形式と見なされる。但しここでの保型因子 j は $C^* \times H_2^0$ 上の Γ -action から得られるものである。従ってこの j は同型 (4) の与え方、すなわち $\widehat{S-D}$ の global section のとり方に依存する。

同型 (4) が得られると、 S の関数環を表す保型形式環を特徴付ける問題が浮上する。つまり

4.2 (問題) H_2^0 上の (Γ, j) -保型形式環の中で、部分環 $C[t_2, t_3, t_4, t_5]$ を特徴付ける条件を求めよ。

たぶん何らかの境界条件が答えになるのだろうが、これはまだ求まっていない。

5 Siegel modular form の環との関係

種数 2 の曲線族を使って周期写像を与えた結果、その像が $C^* \times H_2^0$ (with the monodromy group action) となっていたということになると、その結果得られる保型形式の環と、Siegel modular forms の環との関係は当然気になるところである。種数 2 の Siegel modular forms の環は周知のように

$$\begin{aligned} & C[\psi_4, \psi_6, \chi_{10}, \chi_{12}, \chi_{35}] \quad (\text{下つきの数字は weight を表す。}) \\ & \psi_4, \psi_6, \chi_{10}, \chi_{12} \text{ は } C \text{ 上代数的独立, } \chi_{35}^2 \in C[\psi_4, \psi_6, \chi_{10}, \chi_{12}] \end{aligned} \quad (5)$$

という構造をしている (井草準一 [2][3])。いっぽう我々が研究対象としている環は

$$\begin{aligned} & C[t_2, t_3, t_4, t_5] \quad \text{weight}(t_i) = 2i \\ & t_2, t_3, t_4, t_5 \text{ は } C \text{ 上代数的独立} \end{aligned}$$

である。これより環 $C[t_2, t_3, t_4, t_5]$ の保型形式環としての特徴付けは未だ不明ながら、その代数的構造は (5) とは異なっていることがわかる。この違いは A_2 型 (楕円曲線 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$) のときには生じなかった違いである。

以下ではこの α_i 達の満たす保型性 (9.2) について述べる。

6 theta (テータ) constants の定義と変換公式

本節の内容はすべて [6] に書いてあります。

行列 X に対して X の転置行列を tX と書くことにする。

$$H_g := \{\tau | \tau \text{ は } C \text{ 成分の } g \text{ 次対称行列で, } \text{Im}(\tau) \text{ は正定値}\}, \quad (6)$$

$$\Gamma_g(n) := \{M \in Sp(2g, \mathbf{Z}) | M \equiv I_{2g} \pmod{n}\} \quad (7)$$

とおく。 \mathbf{H}_g を種数 g の Siegel 上半空間、 $\Gamma_g(n)$ を level n の主合同部分群という。 $\varepsilon = (\varepsilon' \varepsilon'') = (\varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_g \varepsilon''_1 \dots \varepsilon''_g) \in \mathbf{Z}^{2g}$ 及び $\tau \in \mathbf{H}_g$ に対して、

$$\vartheta_\varepsilon(\tau) := \sum_{n \in \mathbf{Z}^g} \exp \left[\pi i \left(n + \frac{\varepsilon'}{2} \right) \tau \left(n + \frac{\varepsilon'}{2} \right) + 2\pi i \left(n + \frac{\varepsilon'}{2} \right) \frac{\varepsilon''}{2} \right]$$

と定義する。右辺の級数は \mathbf{H}_g 上絶対かつ広義一様収束する。これを characteristic ε をもつ theta constant と呼ぶ。“constant” と言っても \mathbf{H}_g 上の関数である。混乱のおそれが無い場合は、 $\vartheta_\varepsilon(\tau)$ を ϑ_ε と略記する。 $\varepsilon' \varepsilon''$ が偶数 (resp. 奇数) のとき ε は even (resp. odd) であると言う。実は ε が odd のとき ϑ_ε は恒等的に 0 である。

$M = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix} \in Sp(2g, \mathbf{Z})$, $\tau \in \mathbf{H}_g$, $\varepsilon = (\varepsilon' \varepsilon'') \in \mathbf{Z}^{2g}$ に対して、次の式が成り立つことが知られている。

$$\vartheta_{M \circ \varepsilon}^2(M \circ \tau) = \kappa(M)^2 \exp(2\pi i \phi(M, \varepsilon)) \det(C\tau + D) \vartheta_\varepsilon^2(\tau) \quad (8)$$

但し

$$\begin{aligned} M \circ \tau &:= (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}, & M \circ \varepsilon &:= \varepsilon M^{-1} + ((C^t D)_0 (A^t B)_0), \\ \phi(M, \varepsilon) &:= \frac{1}{4} \{ -\varepsilon''^t D B^t \varepsilon' + 2\varepsilon''^t C B^t \varepsilon' - \varepsilon''^t C A^t \varepsilon'' + 2(\varepsilon''^t D - \varepsilon''^t C) (A^t B)_0 \} \end{aligned}$$

とおく。ここで $g \times g$ 行列 X に対して X の対角成分を順に並べて得られる $1 \times g$ 行列を X_0 と書くことにする。また $\kappa(M)^2$ は M には依存するが ε にも τ にも依存しない定数である。更に任意の $M \in Sp(2g, \mathbf{Z})$ に対して $\kappa(M)^8 = 1$ が成り立つ事が知られている。

7 種数 2 の曲線と Rosenhain の公式

本節の目的は α_i 達の定義を与えることである。粗く言うと、 $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ は種数 2 の曲線の周期に関する Rosenhain の公式 (10) の分母を払って平行移動したものである。種数 2 の任意の曲線は超楕円的であるから次の表示を持つ。

$$X: y^2 = x(x-1)(x-\lambda_3)(x-\lambda_4)(x-\lambda_5) \quad (9)$$

但し $\lambda_i \in \mathbf{C} - \{0, 1\}$ ($i = 3, 4, 5$) $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ は互いに相異なる。曲線 (9) とその曲線上に **Figure-1** のとらりこった $H_1(X, \mathbf{Z})$ の base により周期行列 $\tau \in \mathbf{H}_2$ が得られる。このとき Rosenhain は [7] で、これら λ_i ($i=3, 4, 5$) を theta constants の比で表した。**Figure-1** で与えた base に対して、Rosenhain の公式は、次のようになる ([7])。

$$\lambda_3 = \frac{\vartheta_{0000}^2(\tau) \vartheta_{0100}^2(\tau)}{\vartheta_{1000}^2(\tau) \vartheta_{1100}^2(\tau)}, \quad \lambda_4 = \frac{\vartheta_{0100}^2(\tau) \vartheta_{0001}^2(\tau)}{\vartheta_{1100}^2(\tau) \vartheta_{1001}^2(\tau)}, \quad \lambda_5 = \frac{\vartheta_{0000}^2(\tau) \vartheta_{0001}^2(\tau)}{\vartheta_{1000}^2(\tau) \vartheta_{1001}^2(\tau)}. \quad (10)$$

便宜上 $\lambda_1 := 0, \lambda_2 := 1$ とおく。この λ_i に対して

$$\beta_i := \vartheta_{1000}^2 \vartheta_{1100}^2 \vartheta_{1001}^2 \lambda_i \quad (1 \leq i \leq 5) \quad (11)$$

とおく。そして

$$\alpha_i := \beta_i - \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \beta_j \left(= \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 (\beta_i - \beta_j) \right) \quad (12)$$

とおく。(10)、(11) 及び (12) より、各 α_i は次の表示をもつ。

$$\begin{aligned}
5\alpha_1 &= -\vartheta_{1000}^2 \vartheta_{1100}^2 \vartheta_{1001}^2 - \vartheta_{0000}^2 \vartheta_{0100}^2 \vartheta_{1001}^2 - \vartheta_{1000}^2 \vartheta_{0100}^2 \vartheta_{0001}^2 - \vartheta_{0000}^2 \vartheta_{1100}^2 \vartheta_{0001}^2, \\
5\alpha_2 &= +\vartheta_{1000}^2 \vartheta_{1100}^2 \vartheta_{1001}^2 - \vartheta_{0010}^2 \vartheta_{0110}^2 \vartheta_{1001}^2 - \vartheta_{0011}^2 \vartheta_{0110}^2 \vartheta_{1000}^2 - \vartheta_{0011}^2 \vartheta_{0010}^2 \vartheta_{1100}^2, \\
5\alpha_3 &= +\vartheta_{0000}^2 \vartheta_{0100}^2 \vartheta_{1001}^2 + \vartheta_{0010}^2 \vartheta_{0110}^2 \vartheta_{1001}^2 - \vartheta_{0110}^2 \vartheta_{1111}^2 \vartheta_{0100}^2 - \vartheta_{0010}^2 \vartheta_{1111}^2 \vartheta_{0000}^2, \\
5\alpha_4 &= +\vartheta_{1000}^2 \vartheta_{0100}^2 \vartheta_{0001}^2 + \vartheta_{0011}^2 \vartheta_{0110}^2 \vartheta_{1000}^2 + \vartheta_{0110}^2 \vartheta_{1111}^2 \vartheta_{0100}^2 - \vartheta_{0011}^2 \vartheta_{1111}^2 \vartheta_{0001}^2, \\
5\alpha_5 &= +\vartheta_{0000}^2 \vartheta_{1100}^2 \vartheta_{0001}^2 + \vartheta_{0011}^2 \vartheta_{0010}^2 \vartheta_{1100}^2 + \vartheta_{0010}^2 \vartheta_{1111}^2 \vartheta_{0000}^2 + \vartheta_{0011}^2 \vartheta_{1111}^2 \vartheta_{0001}^2.
\end{aligned}$$

また、各 $\alpha_i - \alpha_j$ は次の表示をもつ。

$$\begin{aligned}
\alpha_2 - \alpha_1 &= \vartheta_{1000}^2 \vartheta_{1100}^2 \vartheta_{1001}^2, & \alpha_3 - \alpha_1 &= \vartheta_{0000}^2 \vartheta_{0100}^2 \vartheta_{1001}^2, \\
\alpha_4 - \alpha_1 &= \vartheta_{1000}^2 \vartheta_{0100}^2 \vartheta_{0001}^2, & \alpha_5 - \alpha_1 &= \vartheta_{0000}^2 \vartheta_{1100}^2 \vartheta_{0001}^2, \\
\alpha_3 - \alpha_2 &= \vartheta_{0010}^2 \vartheta_{0110}^2 \vartheta_{1001}^2, & \alpha_4 - \alpha_2 &= \vartheta_{1000}^2 \vartheta_{0011}^2 \vartheta_{0110}^2, \\
\alpha_5 - \alpha_2 &= \vartheta_{0011}^2 \vartheta_{0010}^2 \vartheta_{1100}^2, & \alpha_4 - \alpha_3 &= \vartheta_{0110}^2 \vartheta_{1111}^2 \vartheta_{0100}^2, \\
\alpha_5 - \alpha_3 &= \vartheta_{0000}^2 \vartheta_{0010}^2 \vartheta_{1111}^2, & \alpha_5 - \alpha_4 &= \vartheta_{0011}^2 \vartheta_{1111}^2 \vartheta_{0001}^2.
\end{aligned}$$

7.1 (補足) 上の 10 個の式 (「 $\alpha_i - \alpha_j = \dots$ 」のこと) は全て次の様に書ける。

$$\alpha_i - \alpha_j = \text{sign}(i - j) \vartheta_{[i]+[j]+[k]} \vartheta_{[i]+[j]+[l]} \vartheta_{[i]+[j]+[m]}. \quad (13)$$

但し i, j, k, l, m は 1, 2, 3, 4, 5 の置換を表す。また $[]$ は (14) で対応づけられる *odd theta characteristics* を表すものとする。それから $\text{sign}(i - j)$ は $i - j$ の符号を表すものとする。

8 群 Γ' の定義

$\Gamma_2(1)/\Gamma_2(2)$ が 6 次対称群 S_6 と同型であることは良く知られた事実である。これは 6 個の *odd theta characteristics* (of genus two) への $\Gamma_2(1)(= Sp(4, \mathbb{Z}))$ の作用として得られる。 Γ' を定義する際必要になるので、この同型対応を具体的に与えよう。種数 2 では *odd theta characteristics* は次の 6 個

$$[1] := (0101), [2] := (0111), [3] := (1011), [4] := (1010), [5] := (1110), [6] := (1101), \quad (14)$$

であるが、各 $M \in \Gamma_2(1)$ に対して

$$\varepsilon \bmod (2\mathbb{Z})^4 \longmapsto M \circ \varepsilon \bmod (2\mathbb{Z})^4 \quad (15)$$

なる対応が、上記の 6 個の *odd theta characteristics* の置換を惹き起こす。よって、各 $M \in \Gamma_2(1)$ 及び $i \in \{1, \dots, 6\}$ に対して

$$[M(i)] \equiv M \circ [i] \bmod (2\mathbb{Z})^4.$$

を満たすように $M(i) \in \{1, \dots, 6\}$ を採る。こうして群の準同型 $\Gamma_2(1) \rightarrow S_6$ が得られた。この準同型により同型 $\Gamma_2(1)/\Gamma_2(2) \cong S_6$ が得られる。

ところで今回私が注目している群は $\Gamma_2(1)$ そのものではなくて次に定義する群 Γ' である。

8.1 (定義) $\Gamma' := \{M \in \Gamma_2(1) | M \circ (1101) \equiv (1101) \bmod (2\mathbb{Z})^4\}.$

この群は次の性質を持つ。

$$\Gamma_2(2) \subset \Gamma' \subset \Gamma_2(1) \quad \text{and} \quad \Gamma'/\Gamma_2(2) \cong S_5.$$

実は次が成り立つ。

8.2 (補題 (*A'Campo* [1])) $\Gamma' = \Gamma$.

9 現在までの結果 (2)

上記の α_i ($1 \leq i \leq 5$) と群 Γ' に対して、次の補題が成り立つことがわかった。

9.1 (補題) $\Gamma' \ni M \mapsto \chi(M) := \kappa(M)^2 \exp[2\pi i \phi(M, (1101))] \in \mathbf{C}^*$ は群の準同型である。

この補題 (9.1) はテータ定数の変換公式により明らかである。

9.2 (補題) $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \forall M = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix} \in \Gamma', \forall \tau \in \mathbf{H}_2$ に対して、

$$\alpha_{M(i)}(M \circ \tau) = \chi(M) \det(C\tau + D)^3 \alpha_i(\tau).$$

が成り立つ。

証明は theta constants の変換公式と (7.1) を使う。補題 (9.2) より保型因子 j はおそらく次のようになっているものと思われる。

9.3 (予想) $j(M, \tau) = \sqrt{\chi(M) \det(C\tau + D)^3} \quad (M = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix} \in \Gamma, \tau \in \mathbf{H}_2)$

(平方根の符号をうまくとれるかが未だ確認出来ていない。) この予想が正しければ、我々が調べている bundle と Siegel modular form に対応する bundle との関係が明確になるであろうという期待を持っている。

10 先生方のコメント

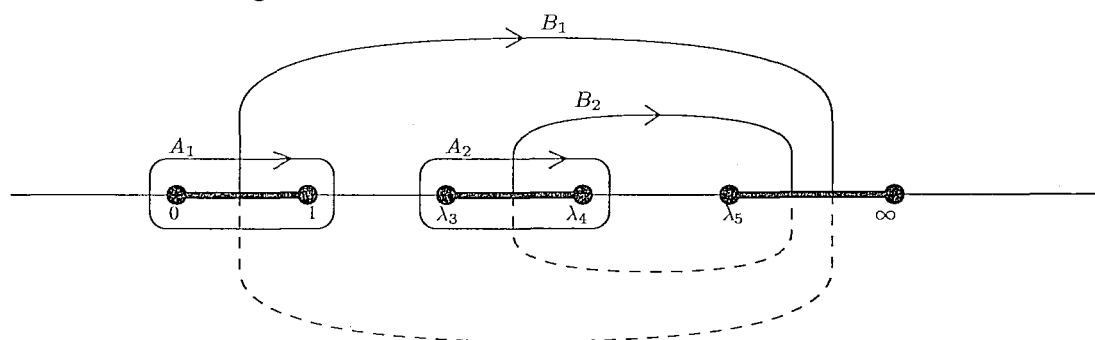
今年の7月に、九州大の吉田正章先生から非常に気になるコメントを戴きました。吉田先生達が数年前に出した結果のなかで問題 (1.1) の解答が (もっと一般的な状況で) 既に与えられているらしいのです。 \mathbf{P}^2 の中の直線の配置空間 ($K3$ 曲面の或る moduli 空間) を使って周期写像 (と modular 関数) の理論を作る際、その空間の内部に \mathbf{P}^1 上の6点の配置空間が現れる。その部分の構造の、先生方による研究結果 ([4]) が該当するものであるとのことでした。その後広島大の松本圭司先生に伺ったところ、問題意識が違ったり多分やっている計算もちがうだろう、とのコメントを戴きました。結局そのへんの事情がまだ私には把握できていません。現在、確認している最中でまだ何とも言えません。 (1997年8月22日)

参考文献

- [1] Norbert A'Campo. : Tresses, monodromie et le groupe symplectique. Comment. Math. Helvetici, vol. 54 (1979), pp. 318-327.

- [2] Igusa, J. : On Siegel modular forms of genus two, American Journal of Mathematics, vol.84 (1962), pp.175-200.
- [3] Igusa, J. : On Siegel modular forms of genus two (II), Am. J. Math. **86** (1964), 392-412.
- [4] Matsumoto, K. Sasaki, T. Yoshida, M. : The monodromy of the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces and the hypergeometric function of type (3,6), International Journal of Mathematics Vol. 3, No. 1 (1992) 1-164.
- [5] Joseph A. Minahan. : Hyperelliptic curves for Supersymmetric Yang-Mills, hep-th/9507032.
- [6] H.E.Rauch, H.M.Farkas : Theta Functions with Applications to Riemann Surfaces, Baltimore 1974.
- [7] Rosenhain, G. : Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, 1851, Ostwald's Klassiker der Exacten Wissenschaften, no. 65 (1895).

Figure-1



タイヒミュラー空間のアール埋め込みと プリーツ座標について

小森 洋平 (大阪市立大学 理 数学)

研究集会「リーマン面に関する位相幾何学」
1997年9月18日(木) (北海道大学)

1 タイヒミュラー空間のアールモデル

Definition 1.1 (標準的な生成系)

S を 1 つ穴の開いた向き付けられたトーラスとする. このとき S の基本群の生成系の順序対 α, β が標準的 とは、与えられた S の向きに対して、 α と β の交点数が $+1$ であることとする。

Definition 1.2 (Γ のプラス成分 Ω^+ とマイナス成分 Ω^-)

$\Gamma = \langle A, B \rangle$ を *marked quasi-Fuchsian group of once-punctured torus* とする. このとき Γ の不連続領域 $\Omega(\Gamma)$ は 2 つの連結成分からなる. その一方の成分 Ω^+ が Γ のプラス成分であるとは、 Γ の与えられた生成系 A, B から定まる Ω^+/Γ の基本群の生成系が標準的であることとする. もう一方の成分 Ω^- を Γ のマイナス成分ということにする。

Theorem 1.1 (1 つ穴の開いたトーラスのアールスライス ([3], [9] 参照))

S を 1 つ穴の開いたトーラスと同型なリーマン面とし、その基本群の標準的な生成系を α, β とする. さらに S の向きを逆にする微分同相写像から誘導される $\pi_1(S)$ の *involution* を θ とする. このとき、次の 2 つの条件をみたす *marked quasi-Fuchsian group* $\Gamma = \langle A, B \rangle$ がメビウス変換での共役を除いて一意に定まる。

1. α を A に、 β を B にうつすような $\pi_1(S)$ から Γ への同型写像を誘導する、 S から Ω^+/Γ への *conformal map* が存在する。
2. Ω^+ から Ω^- への *conformal map* を与える位数 2 のメビウス変換 E が存在し、 Γ の任意の元 γ と Ω^- の任意の点 z に対し、次の関係式 $E(\gamma z) = \theta(\gamma)E(z)$ を満たす. ここで、 θ を Γ の *involution* とみなすため、条件 1 にある $\pi_1(S)$ から Γ への同型写像を用いることとする。

(証明) リーマン面 S の正則な普遍被覆空間として上半平面 \mathbf{H} をとり、その被覆変換群を G とする。 θ を誘導する、 S の向きを逆にする微分同相写像は穴まで連続にのびると仮定してもよい。その \mathbf{H} への持ち上げを f とすると、任意の $g \in G$ と $z \in \mathbf{H}$ に対し $f(gz) = \theta(g)f(z)$ を満たす。次に下半平面 \mathbf{H}_* から \mathbf{H} への写像 h を $h(z) = f(\bar{z})$ (ここで \bar{z} は z の複素共役) で定義すると、同様の関数等式 $h(gz) = \theta(g)h(z)$ ($g \in G, z \in \mathbf{H}_*$) を満たす。そこで、 G 不変なベルトラミ微分 μ を次のように定義する。

$$\mu = \begin{cases} 0 & \text{in } \mathbf{H} \\ h_{\bar{z}}/h_z & \text{in } \mathbf{H}_*. \end{cases}$$

このとき可測なリーマンの写像定理より、ベルトラミ方程式 $w_{\bar{z}} = \mu w_z$ を満たす、リーマン球面上の擬等角写像 w がメビウス変換の合成を除いて一意に存在する。ここで w と $w \circ h^{-1}$ は \mathbf{H} で正則であることに注意する。 $\Gamma = wGw^{-1}$, $A = w\alpha w^{-1}$, $B = w\beta w^{-1}$ とおくと、 $\Gamma = \langle A, B \rangle$ は $\Omega^+ = w(\mathbf{H})$ と $\Omega^- = w(\mathbf{H}^*)$ を不連続領域の不変成分にもつ marked quasi-Fuchsian group になり、等角写像 $w : \mathbf{H} \rightarrow \Omega^+$ は条件 1 を満たす。次に等角写像 $C = whw^{-1} : \Omega^- \rightarrow \Omega^+$ が位数 2 のメビウス変換であることをいう。 Γ の不連続領域 $\Omega(\Gamma)$ 上の写像 E を、 Ω^- では $E = C$ 、 Ω^+ では $E = C^{-1}$ で定義すると、関数等式 $E\gamma E^{-1} = \theta(\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma$) を満たす。ここで Γ は quasi-Fuchsian group より幾何学的有限であり、 θ はリーマン面の自己同相写像から誘導されているので、type-preserving. よってマーデンの同型定理より E はメビウス変換。特に E^2 は恒等写像なので、位数 2 であり条件 2 を満たす。

次に上の 2 つの条件をみたす marked quasi-Fuchsian group $\Gamma = \langle A, B \rangle$ がメビウス変換での共役を除いて一意であることを示す。いま $i = 1, 2$ に対し、上の 2 つの条件を満たす marked quasi-Fuchsian group $\Gamma_i = \langle A_i, B_i \rangle$ とその不変成分 Ω_i^+ and Ω_i^- および位数 2 のメビウス変換 $E_i : \Omega_i^- \rightarrow \Omega_i^+$ があったとする。このとき条件 1 から等角写像 $H : \Omega_1^+ \rightarrow \Omega_2^+$ が存在し、 Ω_2^+ 上で $HA_1H^{-1} = A_2$ と $HB_1H^{-1} = B_2$ を満たす。 $\Omega(\Gamma_1)$ から $\Omega(\Gamma_2)$ への正則写像 F を、 Ω_1^+ で $F = H$ 、 Ω_1^- で $F = (E_2)^{-1} \circ H \circ E_1$ として定義すると F は Γ_1 から Γ_2 への type preserving な同型を導く。よって、再びマーデンの同型定理より F はメビウス変換となる。つまり、題意を満たす marked quasi-Fuchsian group $\Gamma = \langle A, B \rangle$ はメビウス変換での共役を除いて一意である。

Theorem 1.1 より、穴の 1 つ開いたトーラス S のタイヒミュラー空間 $T(S)$ を quasi-Fuchs 群の空間 $QF(S)$ に正則に埋め込むことが出来る ([3],[11] 参照)。この像をアールスライスといい、 E_θ と書くことにする。 E_θ は $\pi_1(S)$ の involution θ のみに依ることに注意する。次に E_θ が、複素平面内の領域として実現出来ることを示す。

Theorem 1.2 (アール埋め込み ([3],[11],[12] 参照))

θ を、 α を β に移す $\pi_1(S)$ の *involution* とする。このとき Theorem 1.1 で定まる *marked quasi-Fuchsian group* $\Gamma = \langle A, B \rangle$ で、その生成系 A, B の $SL_2(\mathbf{C})$ での代表系 A_d, B_d が次の形になるものが一意的に定まる。

$$A_d = \begin{pmatrix} \frac{d^2+1}{d} & \frac{d^3}{4d^2+2} \\ \frac{4d^2+2}{d} & d \end{pmatrix}$$

$$B_d = \begin{pmatrix} \frac{d^2+1}{d} & -\frac{d^3}{4d^2+2} \\ -\frac{4d^2+2}{d} & d \end{pmatrix}$$

ここで、 d は 0 でない複素数とする。

(証明) Γ の生成系 A, B の交換子 $P = [A, B]$ は parabolic であり、その固定点を x_P とする。Elliptic な元 E は、 θ の条件より $EAE^{-1} = B$ を満たすので、 $EPE^{-1} = P^{-1}$ も満たす。つまり E は x_P を固定点として持つ。 E のもう 1 つの固定点を x_E とする。 $x_P, x_E, P(x_E)$ をそれぞれ $\infty, 0, 1$ に移すメビウス変換で Γ の共役をとると、 P, E はそれぞれ $P(z) = z + 1, E(z) = -z$ となる。 Γ を $SL_2(\mathbf{C})$ に不連続群として持ち上げるためには P の持ち上げを

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とすればよく、条件 $[A, B] = P$ と $EAE^{-1} = B$ より、 A, B の持ち上げは上の A_d, B_d でとれることが計算からわかる。

$\Gamma_d = \langle A_d, B_d \rangle \subset SL_2(\mathbf{C})$ をパラメーター d に対応する *marked quasi-Fuchsian group* とする。 $\Gamma_d \subset PSL_2(\mathbf{C})$ の $SL_2(\mathbf{C})$ への持ち上げの自由度は d の符号に対応する。またタイヒミュラー空間の複素構造の定義から、 A_d の固定点 $\frac{1 \pm \sqrt{4d^4+1}}{4(d^2+1)}$ は E_θ 上正則である。よって d^2 は E_θ の正則な大域的座標になる ([3],[11] 参照)。 $\tilde{E}_\theta = \{d \in \mathbf{C} | \Gamma_d \in E_\theta\}$ とおく。

Lemma 1.1 d が 0 でない実数とすると、 d は \tilde{E}_θ の元である。

(証明) A_d と B_d のトレースはともに $\frac{2d^2+1}{d}$ 。よって d が 0 でない実数とすると A_d と B_d は hyperbolic。一方 $[A_d, B_d]$ のトレースは -2 より、 A_d と B_d で生成される群はフックス群になり、 d は \tilde{E}_θ の元である。

Lemma 1.2 d が \tilde{E}_θ の元ならば、その複素共役 \bar{d} も \tilde{E}_θ に含まれる。

(証明) $A_{\bar{d}}$ と $B_{\bar{d}}$ で生成される群は Γ_d を複素共役 $I(z) = \bar{z}$ で共役したものである。また I は P, E と可換より、 \bar{d} もアールスライスの元になる。

Proposition 1.1 虚軸は \tilde{E}_θ の外にある。

(証明) 虚軸上の点 d が \tilde{E}_θ に含まれているとする。タイヒミュラー空間 $T(S)$ は弧状連結より、 \tilde{E}_θ 内で、 d と実軸上の点 d' を結ぶ道がある。この道に $d \mapsto -d$ と $d \mapsto \bar{d}$ を作用させると、 \tilde{E}_θ 内に自明でない閉曲線ができる。これはタイヒミュラー空間 $T(S)$ が単連結であることに矛盾する。

Proposition 1.1 より、 E_θ は右半平面にあるとしてよい。特に d を E_θ の正則な大域的座標に取ることが出来る。 E_θ 内の正の実軸をアールラインといい、 \mathbf{R}_θ と書くこととする。

Proposition 1.2 アールラインは E_θ 内の *Fuchsian groups* の部分に一致する。

(証明) Lemma 1.1 よりアールラインの元はみなフックス群である。逆に $\Gamma_d = \langle A_d, B_d \rangle$ がフックス群のとなると A_d のトレース $\frac{2d^2+1}{d}$ と $A_d B_d$ のトレース $\frac{2d^2+1}{d^2}$ はともに実数なので、 d も実数である。

Lemma 1.2 で見たように、複素共役写像 $I(d) = \bar{d}$ は E_θ の反正則な *involution* を与える。次に E_θ の正則な *involution* をみる。

Proposition 1.3 $S(d) = \frac{1}{2d}$ は E_θ の正則な *involution* である。

(証明) marked quasi-Fuchsian group $\Gamma_d = \langle A_d, B_d \rangle$ に対し、 B_d, A_d^{-1} もまた標準的な生成系で同じプラス成分とマイナス成分を持つ。この生成系をメビウス変換 MA_d (ここで $M := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) で共役をとると $\Gamma_{\frac{1}{2d}} = \langle A_{\frac{1}{2d}}, B_{\frac{1}{2d}} \rangle$ が得られる。

穴の1つ開いたトーラス S のタイヒミュラー空間 $T(S)$ は次のように自然に上半平面 \mathbf{H} と同一視出来る ([6],[11],[16] 参照)。 \mathbf{H} 内の点 τ に対し、

$z \mapsto z+1$ と $z \mapsto z+\tau$ で生成される群を G_τ とする。 G_τ は $\mathbf{C}_\tau = \{\tau \in \mathbf{C} \mid z \neq n+m\tau \text{ for } m, n \in \mathbf{Z}\}$ に作用する。 \mathbf{H} から \mathbf{C}_τ/G_τ への正則な普遍被覆写像を π とし、 Γ_τ を π の被覆変換群とする。このとき条件 $\pi(Az) = \pi(z) + 1$ と $\pi(Bz) = \pi(z) + \tau$ を満たす Γ_τ の生成系 A, B は Riemann 面 \mathbf{H}/Γ_τ の標準的な homotopy 基底になる。この対応により \mathbf{H} から $T(S)$ への conformal map が定まる。Theorem 1.1 でみた $T(S)$ から E_θ への自然な写像との合成により、 \mathbf{H} から E_θ への conformal map ψ が定まる。この写像 $\psi: \mathbf{H} \rightarrow E_\theta$ をアール埋め込みという。アール埋め込みで、 E_θ の involutions I, S やアールラインを上半平面でみると以下の通り。

Proposition 1.4 1. $\psi^{-1} \circ S \circ \psi(\tau) = -\frac{1}{\tau}$.

2. $\psi^{-1} \circ I \circ \psi(\tau) = \frac{1}{\tau}$.

3. アール埋め込み ψ により、上半平面内の半円 $\{\tau \in \mathbf{H} \mid |\tau| = 1\}$ はアールライン \mathbf{R}_θ に移る。

(証明)

1. A_d, B_d から B_d, A_d^{-1} への基底の変換に対応するモジュラー群 $PSL_2(\mathbf{Z})$ の元は $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ より。
2. 主張 1 より、 S の固定点 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ に $\psi^{-1} \circ S \circ \psi$ の固定点 i が対応する。また i は I の固定点でもある。一方 $\psi^{-1} \circ I \circ \psi(\tau)$ は $\lambda \frac{1}{\tau}$ (ここで λ は正の実数) の形をしていることから $\lambda = 1$ がわかる。
3. \mathbf{R}_θ と $\{\tau \in \mathbf{H} \mid |\tau| = 1\}$ はそれぞれ I と $\psi^{-1} \circ I \circ \psi$ の固定点集合より、主張 2 から主張 3 がでる。

2 穴の1つ開いたトーラス上の単純閉曲線の記号化

以下 [16] に従い、穴の1つ開いたトーラス上の単純閉曲線の自由ホモトピー類全体と有理数全体 $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$ の間に対応を作る。平面に正方格子を描き、頂点をすべて外す。縦の辺には記号 α を、横の辺には記号 β をふる。既約分数 $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \cup \{\infty = \frac{1}{0}\}$ に対し、傾きが $\frac{p}{q}$ で格子の頂点を通らない直線を $L(\frac{p}{q})$ とする。辺 α, β をそれぞれ同土張り合わせると、穴の1つ開いたトーラス S ができ、 $L(\frac{p}{q})$ は S 上の穴の周りのループに自由ホモトープでない単純閉曲線を定

める。 S 上の穴の周りのループに自由ホモトープでない単純閉曲線の自由ホモトピー類全体を $\Sigma(S)$ とし、 S 上の曲線 L の自由ホモトピー類を $[L]$ とするとき、以下のことがわかる。

Proposition 2.1 ([16] 参照)

1. $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \cup \{\infty = \frac{1}{0}\}$ に $[L(\frac{p}{q})] \in \Sigma(S)$ を対応させる写像は *well-defined* かつ全単射。
2. $[L(\frac{p}{q})]$ に対応する $\pi_1(S) = \langle \alpha, \beta \rangle$ の元 $W(\frac{p}{q})$ を以下のように帰納的に定めることが出来る。まず、 $W(\frac{0}{1})$ と $W(\frac{1}{0})$ を次のように定める。

$$W(\frac{0}{1}) = \alpha, W(\frac{1}{0}) = \beta.$$

$ps - qr = \pm 1$ を満たす $p/q < r/s$ に対し、すでに $W(\frac{p}{q})$ と $W(\frac{r}{s})$ が定まっているとする。このとき $W(\frac{p+r}{q+s})$ は次の式で定める。

$$W(\frac{p+r}{q+s}) = W(\frac{p}{q}) \cdot W(\frac{r}{s}).$$

以下、 α と β を A_d と B_d にうつす $\pi_1(S)$ から Γ_d への同型写像により、 $W(\frac{p}{q})$ を Γ_d の元とみなす。

3 Rational pleating rays

Γ_d の limit set を $\Lambda(\Gamma_d)$ として、3次元双曲空間 \mathbf{H}^3 での $\Lambda(\Gamma_d)$ の凸包 C_d およびその凸境界 ∂C_d を考える。 Γ_d はポアンカレ拡張により \mathbf{H}^3 に作用し、 C_d および ∂C_d をそれぞれ保つ。そこで次のような the nearest retraction map $r : \Omega(\Gamma_d) \rightarrow \partial C_d$ を定義する ([4],[8] 参照)。 $\Omega(\Gamma_d)$ の点 x に対し、 \mathbf{H}^3 での x を中心とした horoball で内部が C_d に触らないもののうち最大のものを考え、 ∂C_d との接点を $r(x)$ とする。このとき、この写像 r は Γ_d 同変な同相写像になる。この写像によって、 $\Omega^+(\Gamma)$ と $\Omega^-(\Gamma)$ に対応する ∂C_d の連結成分をそれぞれ ∂C_d^+ 、 ∂C_d^- と書くことにする。

凸境界 ∂C_d はまたプリーツ面の構造ももつ。ここで、簡単にプリーツ面の定義を復習しておく ([2],[4] 参照)。双曲3次元多様体 M 内のプリーツ面とは、完備な双曲曲面 S と S から M への写像 $f : S \rightarrow M$ の組で、その像 $f(S)$ に M から定まる距離を入れると $f : S \rightarrow f(S)$ は等長的であり、 S の任意の点 s は、 f により M 内の測地線に移るようなある S 内の測地線の内点である。

さらに、 f が誘導する基本群の間の準同型写像は単射であることを仮定する。**pleated locus** とは、 f により M 内の測地線に移るようなただ 1 本の S 内の測地線の内点になっているような S の点の全体である。このとき、pleated locus は S の geodesic lamination、つまり S の閉集合で互いに交わらない単純な完備測地線からなることがわかる。我々の場合、 ∂C_d^\pm と $\partial C_d^\pm/\Gamma_d$ はそれぞれ \mathbf{H}^3 と \mathbf{H}^3/Γ_d のプリーツ面である。いま Γ_d は Fuchsian group でない、つまり $d \in E_\theta - \mathbf{R}_\theta$ と仮定する。このとき $W(\frac{p}{q})$ は loxodromic な元であり、その \mathbf{H}^3 での軸を $\gamma(\frac{p}{q})$ とかき、 \mathbf{H}^3/Γ_d 内での対応する単純閉測地線を $\hat{\gamma}(\frac{p}{q})$ と書くことにする。 $\partial C_d^\pm/\Gamma_d$ (または $\partial C_d^\mp/\Gamma_d$) の pleated locus を $pl^+(d)$ (または $pl^-(d)$) とし、以下のような集合を定義する。

$$\begin{aligned} P^+(\frac{p}{q}) &= \{d \in E_\theta \mid pl^+(d) = \hat{\gamma}(\frac{p}{q})\} \\ P^-(\frac{p}{q}) &= \{d \in E_\theta \mid pl^-(d) = \hat{\gamma}(\frac{p}{q})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}) &= P^+(\frac{p}{q}) \cap P^-(\frac{r}{s}) \\ P\{\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\} &= P(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}) \cup P(\frac{r}{s}, \frac{p}{q}). \end{aligned}$$

$P(\frac{p}{q}, \frac{r}{s})$ を $(p/q, r/s)$ -rational pleating ray という。

Proposition 3.1 (Rational pleating rays の基本的な性質)

1. $p/q \neq r/s$ ならば、 $P^+(\frac{p}{q}) \cap P^+(\frac{r}{s}) = \emptyset$ かつ $P^-(\frac{p}{q}) \cap P^-(\frac{r}{s}) = \emptyset$.
2. $pl^+(d) = \hat{\gamma}(\frac{p}{q})$ であるための必要十分条件は $pl^-(d) = \hat{\gamma}(\frac{q}{p})$ である。よってもし $r/s \neq q/p$ ならば $P(\frac{p}{q}, \frac{r}{s})$ は空集合。
3. $\hat{\gamma}(\pm 1)$ は $pl^+(d)$ にも $pl^-(d)$ にもならない。
4. $I(P(\frac{p}{q}, \frac{q}{p})) = P(\frac{q}{p}, \frac{p}{q})$. $S(P(\frac{p}{q}, \frac{q}{p})) = P(-\frac{q}{p}, -\frac{p}{q})$.

(証明)

1. Pleated locus は geodesic lamination かつ cusp の end に向かう測地線は幾何学的有限なクライン群の場合、pleated locus の成分にならないので pleated locus の成分は 1 つ。

2. メビウス変換 $E : \Omega^+ \rightarrow \Omega^-$ は等長変換 $E : \partial C_d^+ \rightarrow \partial C_d^-$ を誘導する。一方 $EW(\frac{p}{q})E = W(\frac{q}{p})$ より、 $\gamma(\frac{p}{q}) \subset \partial C_d^+$ は E で $\gamma(\frac{q}{p}) \subset \partial C_d^-$ にうつる。
3. 主張 2 より、 $pl^+(d) = \hat{\gamma}(\pm 1)$ とすると $pl^-(d) = \hat{\gamma}(\pm 1)$ 。一方、 $\partial C_d^+/\Gamma_d$ と $\partial C_d^-/\Gamma_d$ は互いに交わらないので矛盾。
4. Involutions I, S のアールスライスへの作用の仕方から明らか。

4 Hyperbolic loci と rational pleating rays の関係

$\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$ に対し、 $W(\frac{p}{q}) \in SL_2(\mathbf{C})$ のトレース $TrW(\frac{p}{q})$ を考える。以下これを E_θ 上の正則関数 $T_{p/q}$ とみなす。また複素平面上の有理関数とみなすこともある。トレース関数 $T_{p/q}$ の **hyperbolic locus** を次のように定義する。

$$H(\frac{p}{q}) = \{d \in \mathbf{C} \mid T_{p/q}(d) \in \mathbf{R}, |T_{p/q}(d)| > 2\}.$$

Proposition 4.1 (Hyperbolic loci の基本的な性質)

1. 任意の *hyperboic locus* はアールラインを含む。
2. 任意の $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$ に対し、 $T_{p/q} = T_{q/p}$. よって、 $H(\frac{p}{q}) = H(\frac{q}{p})$.
3. $P\{\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\}$ は $H(\frac{p}{q})$ に含まれる。

(証明)

1. アールライン上、 $W(\frac{p}{q})$ は hyperbolic なので。
2. $TrW(\frac{p}{q}) = TrEW(\frac{p}{q})E = TrW(\frac{q}{p})$.
3. $\gamma(\frac{p}{q})$ が ∂C_d^+ の pleated locus ならば、 $\gamma(\frac{p}{q})$ を境界にもつ 2 つの supporting planes がある。 $W(\frac{p}{q})$ は ∂C_d^+ に作用し、その軸 $\gamma(\frac{p}{q})$ を不変にするので、もし $TrW(\frac{p}{q})$ が複素数ならば、この 2 つの supporting planes は $\gamma(\frac{p}{q})$ を軸として回転してしまう。よって $TrW(\frac{p}{q})$ は実数。

次の結果は rational pleating rays と hyperbolic loci の関係において大切である。

Proposition 4.2 (Proposition 5.4 of [6]、Theorem 3.7 of [7] 参照)
Rational pleating ray $P(\frac{p}{q}, \frac{q}{p})$ は $H(\frac{p}{q}) \setminus \mathbf{R}_\theta$ 内で開かつ閉部分集合。

次の結果は rational pleating rays の存在を保証する。

Proposition 4.3 ([9] 参照)

$E_\theta \setminus \mathbf{R}_\theta$ の元 d が *hyperbolic locus* $H(p/q)$ に入っていて、かつ Earle line \mathbf{R}_θ の十分近くにあれば、 d は *rational pleating ray* $P\{\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\}$ の元である。

5 Rational pleating rays の構造

次の定理で Rational pleating rays の構造について述べる。

Theorem 5.1 ± 1 でない任意の有理数 $\frac{p}{q}$ に対し、*rational pleating ray* $P(\frac{p}{q}, \frac{q}{p})$ は *simple arc* である。その境界は ∂E_θ 上の点 $c_{p/q}$ と Earle line \mathbf{R}_θ 上の点 $b_{p/q}$ であり、 $c_{p/q}$ では $|T_{p/q}(c_{p/q})| = 2$ を満たし、 $b_{p/q}$ は $T_{p/q}$ の \mathbf{R}_θ 上でのただ1つの *critical point* になっている。

定理を示すためにいくつかの準備が必要である。

Lemma 5.1 アールライン \mathbf{R}_θ 上、 d が 0 や無限大にいくと、トレース関数 $T_{p/q}(d)$ の絶対値は無限大にいく。 $T_{p/q}$ の符号は \mathbf{R}_θ 上一定より、 $T_{p/q}$ の *critical point* が \mathbf{R}_θ 上にあることがわかる。

Lemma 5.2 1節でみたように、上半平面 \mathbf{H} を穴の1つ開いたトーラスのタイヒミュラー空間と思い、 \mathbf{H}/Γ_τ の p/q に対応する単純閉測地線の長さが k 以下な \mathbf{H} の点 τ 全体を $C_{p/q}(k)$ とする。このとき、 $C_{p/q}(k)$ の境界 $\partial C_{p/q}(k)$ と実軸の交点は p/q である。さらに $k_1 > k_2$ ならば、 $C_{p/q}(k_1) \supset C_{p/q}(k_2)$ であり、 $\bigcap_{k>0} \overline{C_{p/q}(k)} = p/q$ 。

Lemma 5.3 U を単連結領域とし、 D を単位円板とする。もし、 U 内の *arc* が境界 ∂U 上の一点に *land* するならば、リーマン写像による引き戻しで定まる D 内の *arc* も境界 ∂D 上の一点に *land* する。さらに境界上の相異なる2点に *land* する *arcs* のリーマン写像による引き戻しも ∂D の相異なる2点に *land* する。

以上の準備の下で、Theorem 5.1 を証明する。Lemma 5.1 より、 \mathbf{R}_θ 上にトレース関数 $T_{p/q}(d)$ の *critical point* $b_{p/q}$ がある。そこから $E_\theta - \mathbf{R}_\theta$ に向かって $H(p/q)$ の枝をとる。 $|T_{p/q}(c_{p/q})| = 2$ まで枝をたどる。以上により、 $b_{p/q}$ から $c_{p/q}$ への *simple arc* $I_{p/q}$ が得られた。Proposition 4.2 より、 $I_{p/q}$ は

$P\{p/q, q/p\}$ に含まれる。 Proposition 3.1.4 より必要ならば複素共役をとって、 $I_{p/q}$ は $P(p/q, q/p)$ の部分集合としてよい。 $P(p/q, q/p) - I_{p/q}$ の点 $a_{p/q}$ がとれたとする。 $a_{p/q}$ から $H(p/q)$ の枝を $|T_{p/q}|$ が 2 に向かう方向にとっていく。この枝を $J_{p/q}$ とすると、 $I_{p/q}$ に沿っても $J_{p/q}$ に沿っても $\Omega^+(\Gamma_d)/\Gamma_d$ の p/q に対応する単純閉測地線の双曲的長さは 0 に向かう。よって、それらの ψ^{-1} の像は Lemma 5.2 により p/q に向かう。よって Lemma 5.3 より $J_{p/q}$ も $I_{p/q}$ と同じく $c_{p/q}$ に向かう。以上のことから $c_{p/q}$ はトレース関数 $T_{p/q}(d)$ の critical point である。よって $c_{p/q}$ の近傍において、 $I_{p/q}$ と $J_{p/q}$ で分離される両側に、 $c_{p/q}$ から始まり $|T_{p/q}|$ が 0 に向かう $H(p/q)$ の枝が両側にとれる。トレースの値からこれら 2 つの枝は E_θ の外にあり、同じ impression $c_{p/q}$ を持つ 2 つの相異なる prime ends がみつかる。これらはともにリーマン写像であるアール埋め込み ψ の境界への拡張で p/q に対応しているのでカラテオドリーの定理 (Theorem 15.5 in [14] 参照) に矛盾する。よって $P(p/q, q/p) = I_{p/q}$ 。

Corollary 5.1 $p/q \neq r/s$ ならば $c_{p/q} \neq c_{r/s}$ 。

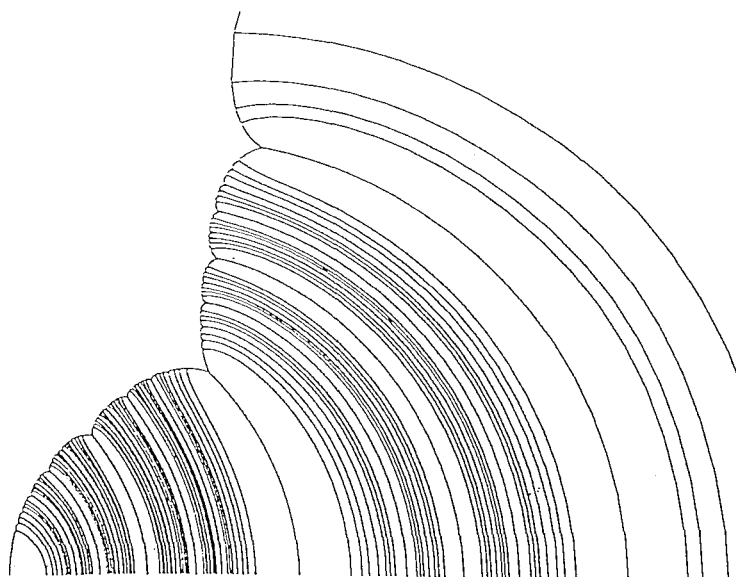
(Proof.) $\Gamma_{c_{p/q}}$ は、[5] の意味での maximal parabolic group になり、Theorem 3 in [5] より、そのような群は群の同型とその parabolic elements により、 $PSL_2(\mathbb{C})$ の共役を除いて一意に定まる。

Corollary 5.2 $b_{p/q} = b_{r/s}$ ならば $r/s = p/q$ または $r/s = q/p$ 。

(Proof.) Theorem 1 in [10] により、 r/s に対応する単純閉測地線の双曲的長さ関数は $\partial C_{p/q}(k)$ 上狭義に凸関数である。よって $\partial C_{p/q}(k)$ と $\partial C_{r/s}(l)$ は高々 2 点でしか交われない。一方 $b_{p/q}$ は $\partial C_{p/q}(k)$ と \mathbf{R}_θ のただ 1 つの接点である。よって $b_{p/q} = b_{r/s}$ ならば、 $\partial C_{p/q}(k)$ と $\partial C_{r/s}(l)$ と \mathbf{R}_θ は、1 点 $b_{p/q}$ で接する。以上のことから $C_{p/q}(k)$ と $C_{r/s}(l)$ は包含関係にあり、Lemma 5.2 より $p/q = r/s$ がわかる。

6 アールモデルのグラフィック

アールモデルをコンピュータで描く基本的なアイデアは次の通り。有理数 p/q に対し、2節の方法で A_d と B_d の word $W(p/q)$ を帰納的に計算する。そのトレース $TrW(p/q)$ はケーリーハミルトンの公式「 $SL_2(\mathbb{C})$ の元 A, B に対し、 $Tr(AB) = TrA \cdot TrB - Tr(AB^{-1})$ 」により帰納的に計算できる。正の実軸上にただ1つ $T_{p/q}(d)$ の critical point $b_{p/q}$ がある。そこからただ1つだけ hyperbolic locus $H(p/q)$ の枝が $E_\theta - R_\theta$ にのびているので、それをたどって $|T_{p/q}(c_{p/q})| = 2$ なる点 $c_{p/q}$ までいく。この点は E_θ の境界上の点であり、この simple arc が rational pleating ray $P(p/q, q/p)$ である。



References

- [1] L.V.Ahlfors, Lectures on Quasiconformal Mappings, Wadsworth and Brooks/Cole Mathematics Series (1987).
- [2] R.D.Canary, D.B.A.Epstein and P.Green, Notes on notes of Thurston, Analytic and geometric aspects of hyperbolic space (ed.D.B.A.Epstein), London Math. Soc. Lecture Notes Series 111(1987),5-92.
- [3] C.J.Earle, Some Intrinsic coordinates on Teichmüller space, Proc. Amer. Math. Soc. 83(1981),527-531.

- [4] D.B.A.Epstein and A.Marden, Convex hulls in hyperbolic space, a theorem of Sullivan, and measured pleated surfaces, *Analytic and geometric aspects of hyperbolic space* (ed.D.B.A.Epstein), London Math. Soc. Lecture Notes Series 111(1987),112-253.
- [5] L.Keen, B.Maskit and C.Series, Geometric finiteness and uniqueness for Kleinian groups with circle packing limit sets, *J. Reine Angew. Math.* 436(1993),209-219.
- [6] L.Keen and C.Series, Pleating coordinates for the Maskit embedding of the Teichmüller space of punctured tori, *Topology* 32(1993),719-749.
- [7] L.Keen and C.Series, The Riley slice of Schottky space, *Proc. London Math. Soc.* 69(1994),72-90.
- [8] L.Keen and C.Series, Continuity of convex hull boundaries, *Pacific. J. Math.* 168(1995),183-206.
- [9] L.Keen and C.Series, How to bend pairs of punctured tori, preprint.
- [10] S.Kerckhoff, The Nielsen realization problem, *Ann. of Math.* 117(1983), 235-265.
- [11] I.Kra, On algebraic curves (of low genus) defined by Kleinian groups, *Annales Polonici Math.* XLVI(1995),147-156.
- [12] I.Kra and B.Maskit, Bases for quadratic differentials, *Comment. Math. Herv.* 57(1982),603-626.
- [13] A.Marden, The geometry of finitely generated Kleinian groups, *Ann. Math.* 99(1974),383-462.
- [14] J.Milnor, *Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures*, Institute for Math. Sci., SUNY Stony Brook, 1990.
- [15] J.R.Parker and C.Series, Bending formulae for convex hull boundaries, *Journal d'Analyse Math.* 67(1995),165-198.
- [16] C.Series, The geometry of Markoff numbers, *Math. Intelligencer* 7(1985),20-29.
- [17] C.Series, Lectures on pleating coordinates for the Maskit embedding of the punctured torus. In *Proceedings of the Daewoo Conference on Mathematics and Physics*. Seoul National University, Seoul, Korea(1992),115-146.

SPECTRA OF OPEN RIEMANN SURFACES

須川 敏幸
京都大学・理学部

September 16, 1997

1. 序

双曲的リーマン面（あるいは、より一般にリーマン多様体） R 上の（計量による）Laplace-Beltrami 作用素 $-\Delta$ に関するスペクトルの分布は『音を聴いて面の幾何学的構造がどの程度分かるか』という観点からこれまで多くの人により研究されてきた。iso-spectral problem と呼ばれるのがそれである。スペクトルの分布はもちろん、面を変形すれば変化する。では、面の変形によって不変な量はないだろうか。例えば素数定理に対応するような形でスペクトルの漸近挙動によって次元や双曲面積（体積）が分かる、というタイプの結果が古くは Weil などにより知られてきた。

一方、これとはある意味で対極をなす、第一固有値と呼ばれる量 $\lambda(R)$ がある。この量も様々な観点から調べられている。例えば、これは Reileigh quotient と呼ばれる次のような量の下限としても特徴付けることが出来る。

$$\lambda(R) = \inf_{\varphi \in C_0^\infty(R)} \frac{\int_R |\nabla \varphi|^2 dVol}{\int_R \varphi^2 dVol}.$$

この値が正であるという性質はいかなる変形によって保たれるか、あるいはどのような時にこの値が正になるか。これについて双曲的リーマン面の場合に考えよう、というのが今回のお話のテーマである。

以下 R は常に -4 の定曲率を持つ双曲計量（Poincaré 計量） $\rho_R = \rho_R(z)|dz|$ を持ったリーマン面とする。すなわち、単位円板からのある正則な普遍被覆写像 $p: \mathbb{D} \rightarrow R$ があって $p^*\rho_R(z) = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$ が成り立つとする。（定曲率 -1 を好む人々も多いので色々な人の結果を比較したり使ったりする際には注意が必要である。自戒の念もこめて。）

この量 $\lambda(R)$ の重要性は次の面の収束指数との関係を見ても分かるであろう。

Theorem 1.1 (Elstrodt-Patterson-Sullivan [6]).

$$b(R) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{if } 0 \leq \delta(R) \leq \frac{1}{2}, \\ \delta(R)(1 - \delta(R)) & \text{if } \frac{1}{2} \leq \delta(R) \leq 1. \end{cases}$$

ここに面の収束指数 $\delta(R)$ とは Γ を R の単位円板上のフックス群模型としたときに (つまり、 $p: \mathbb{D} \rightarrow R$ の被覆変換群),

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |1 - \gamma(0)|^\delta < \infty$$

となるような正数 δ の下限として定義される。実はこの数は Γ の conical limit set の Hausdorff 次元に等しいことが知られている。特にこの定理から収束指数が 1 より小さいことが $\lambda(R) > 0$ であるための必要十分条件であることが分かる。

(同様のことが高次元の双曲的多様体でも成り立つことが知られてきているが、それについてはここではこれ以上言及しない。)

さて $\lambda(R)$ を直接計算したり評価するのは難しいので、ここで Cheeger 定数と呼ばれる定数 $h(R)$ を導入しよう。 \mathcal{D}_R を R 内に含まれる相対コンパクトな領域で境界が滑らかな互いに交わらない有限個の Jordan 曲線からなるもの全体とする。 $D \in \mathcal{D}_R$ に対して

$$|D| = |D|_R = \iint_D \rho_R(z)^2 dx dy,$$

$$|\partial D| = |\partial D|_R = \int_{\partial D} \rho_R(z) |dz|$$

と定め、

$$h(R) = \sup_{D \in \mathcal{D}_R} \frac{|D|}{|\partial D|}$$

と定義する。次の左辺が有名な Cheeger の不等式である。

Theorem 1.2 (cf. [2]).

$$\frac{1}{16h(R)^2} \leq \lambda(R) < \frac{3}{4h(R)}.$$

この結果より特に $\lambda(R) > 0$ であるための必要十分条件は $h(R) < \infty$ である、つまり双曲的等周不等式 $|D| \leq h(R)|\partial D|$ が成り立つことであることが分かる。なお、簡単な計算から分かるように R が単連結であれば $h(R) = 1/2$ である。

2. 有界幾何学

さて、よく知られているように固有値に関するスペクトルの対応物として閉測地線に関するスペクトル (length spectrum) がある。これらの間には密接な関係があることが知られており、例えば適当な条件のもとでは固有値のスペクトルが同じであれば閉測地線のスペクトルも同じであることなどが知られている。そこで、次のような定義をしたくなるのが人情というものである。

Definition 2.1. R の閉測地線の長さの下限を L_R^* と書き、これが正となるようなリーマン面を Lehnner 型であると呼ぶ。

なお、 R が Lehnner 型であるための必要十分条件は Niebur-Sheingorn [4] によってその上の任意の可積分な正則 2 次微分が双曲的有界である、ということが知られている。

ただ、これではやや弱く（実際、Lehnner 型だが $\lambda(R) = 0$ となる例は平面領域でも簡単に作れる）、ここではもう少し強く次のような面を考えよう。

Definition 2.2. L_R を R が puncture を持たない時は L_R^* で、持つ時は 0 によって定義する。 $L_R > 0$ であるような面は単射半径が下から正の定数 $L_R/2$ で押さえられるとも言え換えられるので、このような面を有界幾何学を持つ (of bounded geometry) と呼ぶ。

特に R が平面領域である場合は R が有界幾何学を持つための必要十分条件は境界が一樣完全 (uniformly perfect) であることである (cf. [5])。

Fernández-Rodríguez によって次のことが知られている。

Theorem 2.1 ([2]). 平面領域 R が有界幾何学を持てば $\lambda(R) > 0$ である。また R 内の閉集合 A が条件 $\inf_{a,b \in A, a \neq b} d_R(a, b) > 0$ を満たせば $\lambda(R \setminus A) > 0$ である。ここに d_R は R の双曲距離を表す。

（注意）同じ論文において、 $\lambda(R) > 0$ という性質が擬等角写像によって保たれることが証明されている。

この講演ではこの結果を次のように一般化しなおかつ量的な評価を与える。

Theorem 2.2. R を有界幾何学を持つコンパクトでないリーマン面で種数 $g > 0$ は有限であるとする。このとき、

$$h(R) \leq \frac{1}{2} + \frac{\pi g}{L_R}.$$

特に $\lambda(R) > 0$ が成り立つ。

（注意）種数が有限の場合も金井氏[3]の意味での rough isometry の概念を用いれば定理 2.1 から容易に導けることが分かる。ただ、それだと良い評価を得るのは難しいであろう。

また、多少の puncture などがあっても先と同様の適当な分離条件があれば $\lambda(R) > 0$ が成り立つことが分かる。これについては講演の時に詳しく述べることにしたい。

3. 無限種数の場合

先の定理では種数は有限に限ったが、実は種数が無限の場合は面が有界幾何学を持ったとしても $\lambda(R) = 0$ となることがあり得る。実際、例えば次のことが知られている。

Theorem 3.1 (Brooks [1]). R をコンパクトリーマン面とする。 $\pi: \tilde{R} \rightarrow R$ を (不分岐) *Galois* 被覆写像で被覆変換群が有限生成とすると $\lambda(\tilde{R}) = 0$ であるための必要十分条件はこの被覆が *amenable* であることである。

ここで被覆が *amenable* であるとはこの場合には被覆変換群のある生成元系に関する Cayley グラフが vertex の個数に関して “等周不等式” を満たすことだと思ってよい。例えば、Abel 群は *amenable* だが自由群は *non-amenable* である。なお、この論文では Brooks は普遍被覆についてしか述べていないがこのように一般の形でも成り立つ。

REFERENCES

1. BROOKS, R. The bottom of the spectrum of a Riemannian covering, *J. Reine Angew. Math.*, **357** (1985), 101–114.
2. FERNÁNDEZ, J. L. AND RODRÍGUEZ, J. M. The exponent of convergence of Riemann surfaces. Bass Riemann surfaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **15** (1990), 165–183.
3. KANAI, M. Rough isometries, and combinatorial approximations of geometries of noncompact Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, **37** (1985), 391–413.
4. NIEBUR, D. AND SHEINGORN, M. Characterization of Fuchsian groups whose integrable forms are bounded, *Ann. of Math.*, **106** (1977), 239–258.
5. SUGAWA, T. Various domain constants related to uniform perfectness, Preprint (1997).
6. SULLIVAN, D. Related aspects of positivity in Riemannian geometry, *J. Diff. Geom.*, **25** (1987), 327–351.

WEB幾何学：なぜ(DOUBLE)TRANSLATION面からリーマン面がでてくるか？

中居 功

北海道大学 数学教室

BLSCHKE SCHOOLによりWEB幾何学が発達するきっかけとなった LIEの発見,それに続く POINCARÉ, WIRTINGERの仕事を紹介する。

Translation surface とはつぎのようにして得られる曲面のことを言う。二つの空間曲線(parametric curves) $C_1(u_1), C_2(u_2) : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, *$ を

$$\begin{aligned}C_1(u_1) &= (f_1(u_1), f_2(u_1), f_3(u_1)), \\C_2(u_2) &= (g_1(u_2), g_2(u_2), g_3(u_2))\end{aligned}$$

とする。このとき写像 $C_1 + C_2 : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ の像 $S = Im(C_1 + C_2)$ は次のパラメーター表示をもつ曲面となる。

$$x = f_1(u_1) + g_1(u_2), y = f_2(u_1) + g_2(u_2), z = f_3(u_1) + g_3(u_2).$$

ここで C_1, C_2 の像はともに直線ではないと仮定しよう。(”そうでない”とき S は単純なものになってしまう。) この曲面は u_1 -曲線 $C_1 + * : C_1(u_1) + C_2(*)$, u_2 -曲線 $C_2 + * : C_1(*) + C_2(u_2)$ による2つの葉層構造 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ を持つ。

明らかに曲面 S は次の方程式をみたす。

$$\partial^2 x / \partial u_1 \partial u_2 = 0, \quad \partial^2 y / \partial u_1 \partial u_2 = 0, \quad \partial^2 z / \partial u_1 \partial u_2 = 0$$

この曲面を $z = F(x, y)$ と表わして上の3番目の方程式を x, y で書き直すと

$$f'_1 g'_1 F_{xx} + (f'_1 g'_2 + f'_2 g'_1) F_{xy} + f'_2 g'_2 F_{yy} = 0$$

となる。もう少しのべると Gauss map $(F_x, F_y) : S \rightarrow \mathbb{C}^2(\mathbb{P}^2 \text{ の chart とおもう })$ は generic な点で非特異であり S 上の局所座標と思ってよいので f'_1, f'_2, g'_1, g'_2 は F_x, F_y の関数として書け、次のタイプの Monge-Ampère 微分方程式となる。

$$P(F_x, F_y) F_{xx} + Q(F_x, F_y) F_{xy} + R(F_x, F_y) F_{yy} = 0$$

(これはムリヤリ書き直しているようにみえるがこの方程式は後に Lie による Double translation surface の分類で基本的役割をしている。)

Lie の仕事を説明するために上で触れた Gauss map についてももう少し詳しく述べよう。 u_i -曲線の Gauss map

$$C'_i : S \rightarrow \mathbb{P}^2$$

を

$$C'_1(u_1) = [f'_1(u_1) : f'_2(u_1) : f'_3(u_1)],$$

$$C'_2(u_2) = [g'_1(u_2) : g'_2(u_2) : g'_3(u_2)],$$

と定義し Gauss map $Gauss : S \rightarrow \mathbb{P}^{2\vee}$ を

$$Gauss(p) = \{S \text{ の } p \text{ での接ベクトルを } \mathbb{P}^2 \text{ の元とみなしたもの}\}^\vee$$

と定める。言い替えると $p = C_1(u_1) + C_2(u_2) \in S$ としたとき $Gauss(p)$ は $C'_1(u_1), C'_2(u_2)$ で張られる射影直線(の dual)である。

Gauss map はクラメールの公式から

$$Gauss(p) = [\det \begin{vmatrix} f'_2 & f'_3 \\ g'_2 & g'_3 \end{vmatrix} : -\det \begin{vmatrix} f'_1 & f'_3 \\ g'_1 & g'_3 \end{vmatrix} : \det \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 \\ g'_1 & g'_2 \end{vmatrix}]$$

と表わせる。

S. Lie (1842-1899) は 1882 年の論文で Double translation surface を研究した。ここで Double translation surface とは、2 通りの translation 構造を持つ曲面のことをいう。つまり 4 つの空間曲線 $C_1, \dots, C_4 \subset \mathbb{C}^3$ を用いて

$$S = \text{Im}(C_1 + C_2) = \text{Im}(C_3 + C_4)$$

と書けるものを言う。ここでは二つの構造 $C_1 + C_2, C_3 + C_4$ が一般の位置にあることを仮定しなくてよい。さて Lie の結果は以下のものである。

定理 0.1 Lie (1882). $S \subset \mathbb{R}^3$ を double translation surface とする。このとき Gauss map C'_i の像はすべて一つの \mathbb{P}^2 の 4 次の代数曲線にふくまれる。

この定理は後で証明する。この定理により Translation surface を生成する空間曲線を忘れてしまってもそれらは”特別な場合”以外は一意に決まることを言っている。その特別なものが面白いのだが...

後でわかることだが、

命題 0.2. この 4 次の代数曲線は既約である。しかもそれは種数 3、次数 4 の標準平面曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ であり、曲面 S はその曲線のヤコビアン of the theta factor と自然に同一視できる。

命題 0.3. Gauss map $S \rightarrow \mathbb{P}^{2\vee}$ は 6 枚の sheet をもつ branched covering であり、その分岐集合は C の射影双対曲線である。

1. 射影空間曲線の双対 Projective(Linear) Web.

ここでは一般に代数的な degree d の空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ にたいして双対空間 $\mathbb{P}^{n\vee}$ 上の d-web 構造 \mathcal{W}_C について説明する。

定義1.1. C の点 x の双対超平面を $x^\vee = H_x$ と書く。 H_x の族を $\mathcal{W}_C = \{H_x, x \in C\}$ と書き、 C の双対 Web または単に Algebraic Web という。

まずはじめに射影幾何の双対性より

$$p \in H_x = x^\vee \iff p^\vee \ni x$$

であるから p 通る H_x の数は $p^\vee \cap C$ の元の (もちろん重複度をこめた) 個数、つまり曲線 C の次数に等しい。

$$p^\vee \cap C = \{x_1, \dots, x_d\}$$

で x_i はすべて異なるとしよう。このとき交点 x_i は重複していないので、そこで C と p^\vee は横断的に交わるので交点 $x_i \in C$ は p のまわりで定義された C に値をとる非特異な関数 $x_i(p)$ とみなすことができる。従って p のまわりで超平面 $x_i^\vee = H_{x_i} = \{x_i(p) = x_i\}$ により非特異な葉層 \mathcal{F}_i が定義される。 x_1, \dots, x_d が一般の位置にあるとき葉層 \mathcal{F}_i は一般の位置となる。

葉層 \mathcal{F}_i に関して次の興味深い結果が知られている。

定理1.2 Nakai. $C, C' \subset \mathbb{P}^n$ を非退化(超平面に含まれない)で既約な空間曲線、 h を \mathbb{P}^n の位相同形写像とする。 h が向き付けを保ち(逆にしている) Web 構造 \mathcal{W}_C を $\mathcal{W}_{C'}$ に移しているとき、言い替えると $h(H_p) = H_{\phi(p)}, p \in C$ となる写像 $\phi: C \rightarrow C'$ があるとする。このとき C または C' が次数 $n+1$ の楕円曲線でなければ、 g および h, ϕ は正則同形(反正則同形)である。

次数 d の空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ の双対 Web \mathcal{W}_C は \mathbb{P}^n の双対空間 $\mathbb{P}^{n\vee}$ 上に定義されたが、双対空間は C 上の Linear system としてもみなせる。ここで Linear system について少し説明しておく。

C の超平面 H による断面 $C \cap H$ は d 個の点からなる。

$$C \cap H = \{x_1, \dots, x_d\}$$

これを次のような形式的な C の点の和

$$D = x_1 + \dots + x_d$$

と書くとき、 D を C 上の(正の)因子と呼ぶ。このようにして得られる因子は次のような面白い性質をもっている。

$$D' = C \cap H'$$

を別の超平面 H' により定義される因子とする。 H, H' を \mathbb{C}^n 上で定義する 1 次式をそれぞれ f, g とすると g/f は分母、分子の次数が同じなので \mathbb{P}^n 上の有理関数を定義し C 上の有理形関数に制限する。この関数の因子 $(= (g/f) = 0 \text{ 点集合} - \infty \text{ 点集合})$ は明らかに

$$(g/f) = D' - D$$

となる。またこのような有理形関数は定数倍をのぞいてただ一つ定まる。一般に 2 つの因子 D, D' に対して有理関数 h が存在して $(h) = D' - D$ となるとき D, D' を線形同値と言う。この言葉を使うと $\mathbb{P}^{n\vee}$ は D と線形同値な因子からなる集合とみなせる。また有理形関数の言葉でいうと

$$(h) + D \geq 0 \quad (\text{つまり } h \text{ の } 0 \text{ 点集合が } D)$$

となる有理形関数 h のなす射影空間の部分空間と同一視できる。このような有理形関数 h 全体のなす射影空間を $|D|$ とかき complete linear system とよぶ。これだけで分かったとは思えないが、いたいことは

$$(\text{正の因子}) \in |D| \iff \text{超平面による断面}$$

であるということ。このとき上の定理1.2は次のように言い替えられる。

定理1.3. C, C' は楕円曲線でないとし、 D, E を上のような C, C' の因子とする。 $\phi: C \rightarrow C'$ を向き付けを保つ(逆にする)位相同形で

$$\phi(|D|) = |E|$$

となるとき、言い替えると D と線形同値な因子 $D' = x_1 \cdots + x_d \in |D|$ に対して

$$\phi(D') = \phi(x_1 \cdots + x_d) = \phi(x_1) + \cdots + \phi(x_d)$$

は E と線形同値となるとき ϕ は正則同形(反正則同形)である。

2 積分写像と標準曲線.

最も重要な空間曲線は標準曲線(Canonical curve)である。標準曲線 $C_g \subset \mathbb{P}^{g-1}$ の双対 $(2g-2)$ -Web \mathcal{W}_C を考察しよう。まず標準曲線の作り方からはじめる。 C_g を種数 g のリーマン面とする。 C 上には g 個の線形独立な正則 1-形式 $\omega_1, \dots, \omega_g$ があることが知られている(例えば Riemann-Roch 定理による)。いま積分写像 $\phi: C \rightarrow \mathbb{C}^g$ を次のように定義する。

$$\phi(x) = \left(\int_{\text{base point}}^x \omega_1, \dots, \int_{\text{base point}}^x \omega_g \right)$$

もちろん上の積分は base point からの積分経路によっているので C のサイクル $c \in \pi_1(C)$ に沿った ω_i の積分 $\int_c \omega_i$ つまり周期のぶんだけ ambiguity が残る。つまり ϕ の行き先はヤコビアン $J_C = \mathbb{C}^g / \Lambda$ とするのが正しい定義です。ここで Λ は周期ベクトル $(\int_c \omega_1, \dots, \int_c \omega_g) \in \mathbb{C}^g$ の集合で \mathbb{C}^g の部分群となる。この積分写像の像をやはり $C \subset \mathbb{C}^g / \Lambda$ とかく。

このヤコビアン J_C の中にはテータ因子と呼ばれる余次元 1 の部分多様体 Θ が棲んでいる。これはヤコビアン上のリーマンのテータ関数の 0 点集合だが、ある別の定義によれば、 Θ は

$$\phi(x_1) + \cdots + \phi(x_{g-1}), \quad x_i \in C$$

の集合で言い替えると C の $g-1$ 個の \mathbb{C}^g のベクトル集合としての和

$$\Theta = C + \cdots + C$$

として書け translation surface の構造を持つ。つまり Self translation surface である。ここでは $g-1$ 本の空間曲線はそれぞれ $x_1, \dots, x_{g-1} \in C$ によりパラメトライズされ $g-1$ 次 C の因子

$$D = x_1 + \cdots + x_{g-1} \in C^{\otimes(g-1)}$$

が Θ の局所座標となる。

次に標準曲線 $C \subset \mathbb{C}^{g-1}$ を定義する。標準埋め込み写像 $\psi : C \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ は

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \{\text{holomorphic 1-form } \omega \text{ s.t. } \omega(x) = 0\}^\vee \\ &= [\omega_1(\partial x) : \cdots : \omega_g(\partial x)]\end{aligned}$$

と定義される。正則 1-形式 ω を

$$\omega = a_1\omega_1 + \cdots + a_g\omega_g$$

と書いておくと、条件 $\omega(x) = 0$ は

$$\omega(x) = a_1\omega_1(x) + \cdots + a_g\omega_g(x) = 0$$

となる。従って射影双対の定義に従って

$$\psi(x) = [\omega_1(x) : \cdots : \omega_g(x)]$$

となる。この連比の意味は C の余接線の元としての比、または言い替えると x を C の局所座標とすると

$$\psi(x) = [\omega_1(\partial x) : \cdots : \omega_g(\partial x)]$$

(この写像は、かつてな C 上の直線族の正則切断の線形空間 : Linear system に対して同様に定義できる。)

C 上の正則 1-形式の 0 点集合は C の標準因子と呼ばれ K_C とあらわされる。(もちろん C 上にたくさんの正則 1-形式があるので、たくさん見かけ上集合として異なる標準因子がある。) 上の ψ の定義から C の標準因子は標準曲線 $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ の超平面による断面(もちろん multiplicity も込めて考える)に 1 対 1 に対応することがわかる。ここで標準曲線は次数 $2g-2$ を持つことを注意しておく。

(あるリーマン面 C が超楕円のであるとは C が射影直線 \mathbb{P}^1 上の 2 重被覆となっていることを言う。このとき標準埋め込み写像も次数 $g-1$ の正規有理曲線への 2 重被覆に退化してしまい Θ 上の $2g-2$ -Web 構造も $g-1$ -Web に退化する。)

以前に見たように二つの超平面による断面は因子として線形同値である。これは次のようにしてもわかる。 ω, ω' を 2 つの正則 1-形式、その 0 点集合をそれぞれ D, D' とする。 ω, ω' を局所的に $f(z)dz, g(z)dz$ とかくと $\omega'/\omega = f/g$ となるので、比 ω'/ω は C 上の有理関数となりその因子は

$$(\omega'/\omega) = D' - D$$

である。

かつてに与えた generic な $g-1$ 個の C の点集合 D_+ は標準曲線上で考えると \mathbb{P}^{g-1} の超平面 H を張り D_+ をふくむ $K = H \cap C$ をきめる。この $K = H \cap C$ のうちで D_+ 以外の点は $g-1$ 個ありその点集合を

$$D_- = \{x'_1 + \cdots + x'_{g-1}\}$$

言い替えれば

$$D_+ + D_- = K$$

となるようにする。このとき対応

$$D_+ \Longleftrightarrow D_-$$

は明らかに 1 対 1 である。このことからヤコビアン of テータ因子は D_+ のほかに D_- によってもパラメトライズされているとみなすことができ、各座標 x'_1, \dots, x'_{g-1} にパラメトライズされる曲線により $g-1$ 個の 1 次元葉層構造 $\mathcal{F}_g, \dots, \mathcal{F}_{2g-2}$ を持つことがわかる。以下でこれら x_i -曲線は平行移動で一意的であること、つまり

Θ は D_- によってもある種の Translation 構造をもつ

ことを示す。

3. Abelの定理.

\mathbb{C}^n の Translation surface 構造は余次元 1 の $n-1$ -Web 構造として捉えられることを注意する。Translation surface S を

$$S = C_1 + \cdots + C_{n-1}$$

と書いたとき、 S は $i = 1, \dots, n-1$ にたいして

$$C_1 + \cdots + * + \cdots + C_{n-1}, \quad * \in C_i$$

を葉(leaf)とする余次元 1 の葉層構造を持つ。従って S が double translation surface であるとき

$$S \text{ は } 2n-2\text{-web 構造(of codim 1)を持つ。}$$

これを定義する 1-形式について考察する。

一般に $C \subset \mathbb{P}^n$ を次数 d 、種数 g の代数曲線とし ω を C 上の 1-形式とする。 C の超平面 H_p による断面を

$$C \cap H_p = \{x_1(p), \dots, x_d(p)\}$$

と書く。 $C \cap H_p$ が非特異なとき各 $x_i(p) \in C$ は局所的に p の解析関数となる。

双対空間 $\mathbb{P}^{n\vee}$ 上の 1 形式 $\text{Trace}(\omega)$ は以下のように定義される。

$$\text{Trace}(\omega) = \sum_{i=1, \dots, d} x_i^* \omega$$

ω が正則であるとき $\text{Trace}(\omega)$ も正則となるのを見るのはそれほど難しくない(これが Abel の定理の Abel により証明された部分の特別な場合らしい)。射影空間上の正則 1-形式は 0 以外にないことから

$$\text{Trace}(\omega) = 0$$

を得る。

(dz は $u = 1/z$ とすると $dz = -z^2 du = -1/udu$ とかけるので $z = \infty \in \mathbb{P}$ で 2 位の極を持つ。 ω を \mathbb{P}^1 上の解析的 1-形式とすると ω/dz は \mathbb{P}^1 上の解析的関数となり f/g (f, g は同次) とかける。これから ω の因子は $(\omega) = (dz) = -2$ となる。)

Web 幾何学の立場から上の等式を Abel 方程式とよぶ。この方程式はリーマン面 C から射影空間 \mathbb{P}^n への (embedding でなくても) 解析的写像に対して成り立つことを注意しておく(値域の双対空間 $\mathbb{P}^{n\vee}$ 上に Trace が定義される)。

$D = x_1 + \cdots + x_d$, $D' = y_1 + \cdots + y_d$ を C 上の次数 d の因子とする。もう一度定義を思い出すと D, D' が線形同値とは、ある C 上の有理関数 f があり

$$D' - D = (f) = f \text{ の } 0 \text{ 点集合} - f \text{ の極集合}$$

となることを言う。 $f: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ とみたとき D, D' はともにこの写像 f の $0, \infty$ の逆像である。(値域の \mathbb{P}^1 はその双対 \mathbb{P}^1 と同一視できるので) 上の等式から

$$\sum_{i=1, \dots, d} \int^{x_i} \omega - \sum_{i=1, \dots, d} \int^{x'_i} \omega = \sum_{i=1, \dots, d} \int_{x'_i}^{x_i} \omega$$

Fubini 型の公式より

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \text{Trace}(\omega) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となることがわかる。次のAbelの定理は逆にこれが線形同値を特徴づけることを主張している。

定理3.1 Abelの定理. つぎの条件は同値。

(1)

$$\sum_{i=1, \dots, d} \int_{x'_i}^{x_i} \omega \equiv 0 \pmod{\Lambda}$$

がすべての正則 1-形式 ω に対して成り立つ。

(2) $D = x_1 + \dots + x_d$ と $D' = x'_1 + \dots + x'_d$ は線形同値。

4. Poincaréの仕事.

Abelの定理の応用として以前に約束した、ヤコビアン Θ が double translation 構造を持つことを示す。因子 D_+, D_- の作り方から $K = D_+ + D_-$ は標準因子で、Abelの定理から

$$\int^{x_1} \omega_i + \dots + \int^{x_{g-1}} \omega_i + \int^{x'_1} \omega_i + \dots + \int^{x'_{g-1}} \omega_i$$

は各 $i = 1, \dots, g$ に対して Θ 上のパラメータ D によらない定数となる。積分の base point を適当に選びそこから積分を解析接続することで

$$\int^{x_1} \omega_i + \dots + \int^{x_{g-1}} \omega_i + \int^{x'_1} \omega_i + \dots + \int^{x'_{g-1}} \omega_i = 0$$

と仮定してよい。さてこれを

$$\int^{x_1} \omega_i + \dots + \int^{x_{g-1}} \omega_i = - \int^{x'_1} \omega_i - \dots - \int^{x'_{g-1}} \omega_i$$

と書く。この左辺は $\Theta \subset \mathbb{C}^g$ の i -番目の座標なので Θ は \mathbb{C}^g の中の $x'_i \in C$ によりパラメトライズされた x'_i -曲線

$$C_i(x'_i) = \left(- \int^{x'_i} \omega_1, \dots, - \int^{x'_i} \omega_g \right) \in \mathbb{C}^g$$

からなる translation 構造を持つことがわかる。従って Θ は double translation surface である。

Θ が double translation 構造を持つことがわかったところで Lie の定理のアイデアをここでも適用してみると面白い。まず x_i -曲線の Gauss map は

$$\psi(x_i) = [\omega_1(x_i) : \dots : \omega_g(x_i)]$$

また x'_i -曲線の Gauss map も

$$\psi(x'_i) = [\omega_1(x'_i) : \dots : \omega_g(x'_i)]$$

となりこれらは標準埋め込み $\psi : C \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ による x_i, x'_i の像、つまり標準曲線に他ならない。 Θ の Gauss map はこれらのベクトルで張られる \mathbb{P}^{g-1} の超平面の射影双対である。その超平面を

$$a_1\omega_1(x_i) + \cdots + a_{g-1}\omega_{g-1}(x_i) = 0,$$

または

$$a_1\omega_1(x'_i) + \cdots + a_{g-1}\omega_{g-1}(x'_i) = 0$$

とかくとそれは $[a_1 : \cdots : a_{g-1}]$ あるいは x_i, x'_i で消える 1-形式

$$\omega = a_1\omega_1 + \cdots + a_{g-1}\omega_{g-1} \in \mathbb{P}^{g-1}$$

に 1 対 1 に対応する。

5 Torelli の定理 $+ \epsilon, \epsilon > 0$.

ここで Double translation 構造に直接によらずに Θ からリーマン面 C を絞り出す方法を考えよう。 x_i -curve, x'_i -curve の接ベクトルが Θ の p での接平面を張るとき、あるいは言い替えれば $Gauss(p)$ の双対超平面 H_p と標準曲線の交わりが H_p の中で非退化であるとき Θ は p で非特異である。また Θ の特異性(例えば Tangent cone)はその退化の様子 (Special divisor の deformation) で記述される。非特異な点 p での Gauss map の特異性は H_p と標準曲線の交わりの特異性で記述される。

まずはじめに次を証明する。

定理 5.1 (Torelli?). $Gauss$ map の制限 $Gauss : \Theta \rightarrow \mathbb{P}^{g-1\vee}$ の Θ での分岐点(特異点)集合は

$$\{\phi(x_1) + \cdots + \phi(x_{g-1}) \mid \text{ある } i \neq j \text{ にたいして } x_i = x_j\},$$

また \mathbb{P}^{g-1} での分岐点集合は

$$\{p \in \mathbb{P}^{g-1\vee} \mid p^\vee \cap C \text{ は特異}\} = C \text{ の Projective dual variety}$$

である。

証明. $p \in \mathbb{P}^{g-1\vee}$ とし $H_p \cap C = x_1 + \cdots + x_{2g-2}$ と書こう。交わりが非特異であるとき各 x_i は点 p の非特異な正則関数であり x_i を適当にうまく動かすことで点 p は任意に動ける。従って Gauss map は点 p で最大の階数を持つ。 $H_p \cap C$ が特異なときこの p の双対超平面は自由に動けない。 x_1, \dots, x_{g-1} が H_p を生成するとき $\mathbb{P}^{g-1\vee}$ の p での接平面は、 $\mathbb{P}^{g-1\vee}$ を \mathbb{P}^{g-1} の超平面の集合(グラスマン)とみなしたとき、 $x_i, i = 1, \dots, g-1$ での H_p への法方向のベクトルで生成される。

例えば $x_1 = x_2$ であるとき x_1, \dots, x_{g-1} を適当に(無限小に)動かしても $x_1 = x_2$ では標準曲線の接線は H_p に含まれてしまうので H_p の $x_1 = x_2$ での法方向のベクトルは張らない。従って

$$\text{corank } d \text{ Gauss}(p) \geq 1$$

である。これより Gauss map の特異値集合は標準曲線の接超平面の双対全体、つまり標準曲線の射影双対多様体である。射影幾何の再帰性(bi-duality)により特異値集合の射影双対が標準曲線、つまり埋め込まれたリーマン面 C である。これでよく知られた Torelli の定理の証明を終わる。

一般に余次元 1 の多様体の射影双対は余次元 1 となり、それが曲線となるのはきわめて稀である。そうなるための条件も Monge-Ampere 方程式でかける。

上の命題の証明のなかの議論に空間曲線の Tangent Scroll の基本的結果を応用することで、もっと一般に $x_1 = \cdots = x_i$ が C で generic であるとき

Gauss map の p を通る fiber は i -重点

である。またもっと強く

Gauss map は p で A^{i-1} -type の stable map である。

であることがわかる。

$$A^i(\text{Gauss}) = \{p \in \Theta \mid \text{Gauss} \text{ は } p \text{ で } i\text{-重の分岐をする}\}$$

とすると A^i は Θ のフィルトレーションをあたえる。とくに $i = g - 2$ のとき A^{g-2} は曲線となる。これは $g - 1$ 個のベクトルの和集合

$$(g - 1) \cdot \phi(x) = \phi(x) + \cdots + \phi(x)$$

に一致し、その Gauss map による像は標準曲線の (H. Weyl によって定義された) 双対射影曲線 (strict dual) であることも簡単な Wronskian を使った議論でわかる。我々は次の定理に導かれた。

定理 5.2 (Torelli + $\epsilon, \epsilon > 0$). $\Theta \subset \mathbb{C}^g, C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ を上のものとする。

$$\text{Gauss}(A^1(\text{Gauss})) = \text{projective dual of the canonical curve } C \subset \mathbb{P}^{g-1\vee}$$

$$\text{Gauss}(A^{g-2}(\text{Gauss})) = \text{strict projective dual of the canonical curve } C \subset \mathbb{P}^{g-1\vee}$$

この定理は Θ の “変曲点集合” として C が埋め込まれていることを主張している。

6. Web の定義と Abel 方程式.

さて一般に Web を定義する。 M を n -次元多様体とする。 M 上の余次元 c の d -Web とは、 d 個の余次元 c の葉層 $\mathcal{F}_i, i = 1, \dots, d$ の重ね合せ $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d)$ をいう。通常 \mathcal{F}_i はすべて非特異で一般の位置にあると仮定するが Lie-Poincaré の仕事を含むために、また常微分方程式への応用をみこんで緩やかな特異性も許したい。しかしながらいま簡単のために非特異で一般の位置とする。また余次元 1 の場合のみを考える。

定義 6.1. 余次元 c の d -Web、 $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d)$ 、 $\mathcal{W}' = (\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_d)$ が同型であるとは M の正則同型 h があり $h(\mathcal{F}_i) = \mathcal{F}'_i$ となることを言う。

$d \leq n$ のときは 余次元 1 の d -Web は座標関数 x_i により定義された \mathbb{C}^n の Projective Web、 $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d)$ 、 $\mathcal{F}_i = \{x_i = \text{const}\}$ に同型となることはすぐにわかる。従って $n + 1 \leq d$ の場合が局所的で非特異のときの研究の対象となる。

Web 幾何学では主に局所的な構造をあつかう：Algebrization theorem (定理 21.1) などに見られるように局所的な構造が大域的な代数的構造までも決定してしまう。

さて葉層 \mathcal{F}_i は多様体あるいは多様体の開領域で定義された正則関数 u_i によって定義されているとしよう。

定義16.1 Abel方程式. 次の形の等式

$$f_1(u_1)du_1 + \cdots + f_d(u_d)du_d = 0$$

を Web \mathcal{W} の Abel方程式と呼ぶ。

例えば double translation surface $S = C_1(u_1) + \cdots + C_{n-1}(u_{n-1}) = C'_1(v_1) + \cdots + C'_{n-1}(v_{n-1})$ を、 u_i, v_i を定義level関数とする $2n-2$ -Web とみなしたとき明らかに次の関係式が成り立つ

$$C_1(u_1) + \cdots + C_{n-1}(u_{n-1}) = C'_1(v_1) + \cdots + C'_{n-1}(v_{n-1})$$

これを微分形式でかくと

$$dC_1(u_1)du_1 + \cdots + dC_{n-1}(u_{n-1})du_{n-1} - dC_1(v_1)dv_1 - \cdots - dC'_{n-1}(v_{n-1})dv_{n-1} = 0$$

という Abel方程式になる。

定義6.2. $\{1, \dots, d\}$ の部分集合 $\{i_1, \dots, i_s\}$ に対して

$$f_{i_1}(u_{i_1})du_{i_1} + \cdots + f_{i_s}(u_{i_s})du_{i_s} = 0$$

が成り立つとき Abel方程式は可約であるといい、そうでないとき既約であるという。

定義6.3. 自明(=すべての項が0)でない Abel方程式全体のなす線形空間を \mathcal{A} と書き

$$\dim \mathcal{A} = \text{rank}(\mathcal{W})$$

という。

次数 d , 種数 g の代数的空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ の双対 d -Web \mathcal{W}_C に対しては $\text{rank} \geq g$ である。また Lie-Darboux-Griffiths の定理によりリーマン面 C 上の局所的 1-形式 $f_i(u_i)du_i$ は C 上で定義された共通の正則 1-形式に拡張する。従って

$$\text{rank}(\mathcal{W}_C) = g$$

である。Castelnuovo(1864-1952)により次数 d をきめたときの種数 g の最大値は次の Castelnuovo bound であることが知られている。

定理6.4(Castelnuovo).

$$\pi(d, n) = (d - n) + (d - 2n + 1) + (d - 3n + 2) + \cdots + (d - kn + k - 1)$$

ここで k は $d - 1 \geq k(n - 1)$ となる最大の自然数。とくに $n = 2$ (平面曲線) の場合は

$$\pi(d, 2) = \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2)$$

である。

これは次の定理により拡張される。

定理6.5(Chern(1978)). \mathbb{C}^n の $\text{codim} = 1$ の d -Web にたいし

$$\text{rank}(\mathcal{W}) \leq \pi(d, n)$$

が成り立つ。

定義6.6 Linearization と Algebrization. $\mathcal{W} = (F_1, \dots, F_d)$ を余次元 1 の d -Web の germ とする。正則同形の germ、 f があり $f(F_i)$ の leaf がすべて超平面となる時、つまりある正則曲線の germ $C_i \subset \mathbb{P}^n$ 我あつて $f(F_i) = \{H_x = x^\vee, x \in C_i\}$ となる時、 \mathcal{W} は Linearizable であるという。Linear d -Web の germ, $\mathcal{W}_C, C = (C_1, \dots, C_d)$, C_i は \mathbb{P}^n の正則曲線の germ, が与えられたとする。このとき C_1, \dots, C_d はひとつの m -次元代数曲線のなかにふくまれるとき \mathcal{W}_C は Algebrization できるという。

ドグマチックな大問題。いつ Linearization や Algebrization できるか？

つぎの Lie-Wirtinger の結果は maximal rank な (Castelnuovo bound を attain する) Web にたいしてはこれらの問題は肯定的であることを示唆している。

さてリーマン面のヤコビアンの中に棲む Θ 上には $2g - 2$ -Web 構造があった (§13)。この場合の Castelnuovo bound は

$$\pi(2g - 2, g - 1) = g$$

である。Wirtinger は次の定理を証明した。

定理6.6 S.S. Chern Lie-Wirtinger theorem Monatshefte

Math. Phys. 46, 384-431)idea は Poincaré によっている)。 $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{2g})$ を余次元 1 の \mathbb{C}^g で定義された $2g$ -Web の芽とする。 $\text{rank} = g + 1$ ならば Web は Projectivize できる： \mathbb{C}^n の葉がすべて超平面からなる Web に解析的に同型となる。

このアイデアは Chern-Griffiths によってさらに一般化されている。

7. Darboux-Griffiths の仕事.

Wirtinger の仕事を (おそらく) うけて Darboux は次の定理を示した。

定理21.1 (Lie-Darboux-Griffiths). $\text{rank} \geq 1$ の余次元 1 の既約な Linear Web は代数化できる。

証明. 簡単のために $n = 2$ の場合に証明する。 $q = [-1 : a : b] \in \mathbb{P}^2$ のまわりで d -Web \mathcal{W} が定義されているとする。 Web はすでに線形化されているので \mathcal{W} は双対射影平面の本の滑らかな q の双対直線 $\ell : x = ay + b$ (ここで (x, y) は双対射影平面の座標) と横断的に交わる曲線 C_1, \dots, C_d から定まる双対 Web \mathcal{W}_C であるとしてよい。 もう一度定義を思い出すと \mathcal{W}_C は d 個の 1 次元葉層 \mathcal{F}_i の組で \mathcal{F}_i は C_i の点の双対直線の族である。 q^\vee と C_i の横断性より交点 $p_i = p_i(q)$ は q の正則関数である。

いま C_i 上で定義された 1-形式を ω_i とし、双対平面に引き戻された 1-形式 $p_i^* \omega_i$ も ω_i とかく。いま

$$p_1^* \omega_1 + \dots + p_d^* \omega_d = 0$$

が成り立つとする。証明のプログラムは次のとおりである。

- 1 ω_i は ℓ の周りで定義された C_i に極をもつ有理形 2-形式 Ω の residue として書く
- 2 Ω が射影平面全体に解析的に拡張する。
- 3 Ω の residue ははじめの ω_i の拡張であり ω の極は C_i を繋ぐ代数曲線である。
- 4 Ω の極 C は次数 d の代数曲線である。

8. Part 1 Darboux のアイデアによる.

f_i を C_i の定義式とし

$$\omega_i = \frac{g_i}{f'_i} dx = \text{Res} \left(\frac{g_i}{f_i} dx \wedge dy \right)$$

とかく：ここで $f'_i = \partial f_i / \partial y$ また g_i / f'_i は C_i 上の関数つまり x の関数である。Res は f_i の y_i での微分だけできまるので

$$\omega = \text{Res} \frac{g_i}{f'_i(y - y_i)} dx \wedge dy$$

とも書けることに注意する。

$$\Omega = \Sigma \frac{g_i}{f'_i(y - y_i)} dx \wedge dy$$

と定義する。ただしこの総和は直線 ℓ と C_i との交点 p_i すべてにわたってのものである。これは定義により a, b, y -空間の 2-形式である。しかしそれは見かけ上であり、実は $ay + b = x$ と y の 2-形式であることがわかる。もちろんそれには次の(定理の)仮定をもちいる。

$$\Sigma \omega_i = \Sigma \frac{g_i}{f'_i} dx = 0$$

$\frac{g_i}{f'_i}$ は C_i 上の関数だから C_i 上の関数 t_i をつかって $\frac{g_i}{f'_i} = \partial_b t_i$ とかくと

$$(i) \quad \Sigma \frac{g_i}{f'_i} = \Sigma \partial_b t_i = 0$$

である。 t_i は C_i 上の関数なので

$$dt_i = t_{ix} dx + t_{iy} dy$$

また $x = ay + b$ より $dx = y da + a dy + db$ なので

$$dt_i = t_{ix} y_i da + (t_{ix} a + t_{iy}) dy + t_{ix} db$$

従って a で偏微分すると ($dy = 0$ だから)

$$(*) \quad \partial_a t_i = y_i \partial_b t_i = y_i \frac{g_i}{f'_i}$$

を得る。さて (i) 式を a で偏微分すると

$$(ii) \quad \Sigma y_i \partial_b t_i = \Sigma y_i \frac{g_i}{f'_i} = 0$$

をえる。さて

$$(iii) \quad \Sigma \frac{g_i}{f'_i(y - y_i)} = \Sigma \frac{\partial_b t_i}{y - y_i}$$

が x, y の関数であることをみるのには微分作用素

$$\partial_a - y \partial_b$$

での微分が 0 であることを示せばよい (iii) より

$$\begin{aligned} y \partial_b \Sigma \frac{g_i}{f'_i(y - y_i)} &= \Sigma \partial_b \frac{y g_i}{f'_i(y - y_i)} \\ &= \Sigma \partial_b \frac{y_i g_i}{f'_i(y - y_i)} \end{aligned}$$

上のトリック(*)により

$$\begin{aligned} &= \Sigma \partial_b \frac{\partial_a t_i}{y - y_i} \\ &= \Sigma \frac{\partial_b \partial_a t_i}{y - y_i} + \Sigma \frac{\partial_a t_i \partial_b y_i}{(y - y_i)^2} \end{aligned}$$

ふたたび上のトリック(*)により

$$\begin{aligned} &= \Sigma \frac{\partial_a \partial_b t_i}{y - y_i} + \frac{y_i \partial_b t_i \partial_b y_i}{(y - y_i)^2} \\ &= \Sigma \frac{\partial_a \partial_b t_i}{y - y_i} + \frac{\partial_b t_i \partial_a y_i}{(y - y_i)^2} \\ &= \partial_a \Sigma \frac{\partial_b t_i}{(y - y_i)} \\ &= \partial_a \Sigma \frac{g_i}{f'_i(y - y_i)} \end{aligned}$$

これで証明の 1 の部分を終わる。

9. Part 2. 拡張定理.

これには様々な拡張定理を使えるだろう。ここでは二つを紹介する。

定理9.1 (Camacho-Lins-Sad, Ann.Math. 1992). M^2 をコンパクトな曲面、 $C \subset M$ を曲線、 ω を C の近傍で定義された有理形関数とする。 $M - C$ が Stein であるとする。このとき ω は M の有理形関数に拡張する。

Griffiths は次のような拡張定理を使っている。

定理9.2 (Griffiths Inv.Math. 1976). 射影直線 $\ell \subset \mathbb{P}^n$ のまわりで定義された有理形関数は射影空間全体 \mathbb{P}^n に解析的に拡張する。

我々は $n = 2$ の場合だけだからどちらでも同じである。

10. Part 4. Lagrange interpolation formula.

1 で定義された 2-形式 Ω は、その形から明らかに $y = y_i$ で極を持つ。そのほかに $y = \infty$ でも極を持つように見える(きっと持つはずである)。そこでの Ω の形を観察しよう。一般に \mathbb{P}^1 上の $y = y_i$ で 1-位の極を持つ 1-形式は $y = y_i$ での residue を ρ_i 書くと

$$\left(\sum \frac{\rho_i}{y - y_i} + \text{polynomial in } y \right) dy$$

と書ける。 $u = 1/y$ とおくと

$$\frac{du}{dy} = -\frac{1}{y^2}$$

これより

$$dy = -y^2 du = -\frac{du}{u^2}$$

上の 1-形式を u で書くと

$$\begin{aligned} & \left(\sum \frac{\rho_i}{y - y_i} + \text{polynomial in } y \right) dy \\ &= \left(\sum \frac{-\rho_i}{\frac{1}{u} - y_i} + \text{polynomial in } 1/u \right) \frac{du}{u^2} \\ &= \sum \frac{-\rho_i}{1 - y_i u} \frac{du}{u} + \text{polynomial in } 1/u + \frac{du}{u^2} \\ &= \sum -(\rho_i)(1 + y_i u + (y_i u)^2 + \cdots) \frac{du}{u} + \text{polynomial in } 1/u \frac{du}{u^2} \\ &= \left(\frac{\text{polynomial in } 1/u}{u^2} \right) du - \sum \rho_i \frac{du}{u} + (\text{holomorphic function of } u) du \end{aligned}$$

これが Lagrange の interpolation formula である。1 で作った 1-形式 Ω に

$$\rho_i = \frac{g_i}{f'_i}$$

として適用すると定理の仮定より

$$\sum \rho_i = \sum \frac{g_i}{f'_i} = 0$$

従って Ω は $y = \infty$ でも正則である。特に直線 ℓ は係数 a, b を少し動かしても曲線 C と丁度 d 個の点 $y = y_1, \dots, y_d$ で交わる。従って C の次数は d である。

証明の核にあたるのは Reiss の方法(ii) と Darboux の計算(iii)である。この定理は Griffiths により一般化されているが、そこでもこれらの方法が繰り返し用いられている。

定理10.1. n 次元の double translation surface S は種数 $n+1$ の標準曲線 $C \in \mathbb{P}^n$ の双対 $2n$ -Web \mathcal{W}_C と同形であり、 C のヤコビアン の テータ 因子 の $2n$ -Web \mathcal{W}_Θ と同形である。

証明. Translation surface は rank ≥ 1 なので Lie-Darboux-Griffiths の定理により線形化できる、つまり S はある次数 $2n$ の射影曲線 $C \in \mathbb{P}^n$ の双対 $2n$ -Web \mathcal{W}_C と同形である。また C は既約であることがわかる。上の定理の証明の後半の部分と同じ議論により C は標準曲線である。

札幌市 060

E-mail: nakai@math.hokudai.ac.jp

中村博昭

参照：P.Lochak, L.Schneps との共同研究 [LNS]

種数 g で n 点マークされたリーマン面の写像類群を $M(g, n)$ とし $K(g, n)$ をその pure subgroup とする. 特に写像類群 $M(0, n)$ は標準的な組紐生成元 $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ で生成され、このとき $K(0, n)$ は $x_{ij} = \sigma_{ij}^2$ ($\sigma_{ij} = \sigma_i^{-1} \cdots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \cdots \sigma_i$) たちで生成される ($1 \leq i < j \leq n$). 簡単のため $x_{ji} = x_{ij}$ とおく. また \wedge で副有限完備化を表す. 群 $\hat{K}(0, 4)$ は 2 元 x_{12}, x_{23} で生成される副有限自由群であり、これを以下 $\hat{K}(0, 5)$ における同じ元で生成される部分群と同一視する. $\hat{K}(0, 5)$ を生成するには 5 元 $x_{i,i+1}$ (添字は mod 5) を取れば十分である. 任意の副有限群 G への任意の準同型 $\phi: \hat{K}(0, 4) \rightarrow G$ は生成元に行く先 $x_{12} \mapsto a, x_{23} \mapsto b$ を指定すれば定まるがこのときの $\phi(f)$ を $f(a, b)$ とかく.

Definition 1. \widehat{GT} を組 $(\lambda, f) \in \hat{\mathbb{Z}}^* \times \hat{K}(0, 4)$ でつぎの (I),(II),(III) を満たすもの全体の集合とする. (I) $f(x_{23}, x_{12})f(x_{12}, x_{23}) = 1$;

(II) $f(x_{12}, x_{23})x_{12}^m f(x'_{13}, x_{12})x'_{13}{}^m f(x_{23}, x'_{13})x_{23}^m = 1$;

(III) $f(x_{34}, x_{45})f(x_{51}, x_{12})f(x_{23}, x_{34})f(x_{45}, x_{51})f(x_{12}, x_{23}) = 1$.

但しここで $m = (\lambda - 1)/2$, $x'_{13} = (x_{12}x_{23})^{-1}$.

このとき \widehat{GT} の各元は $\hat{K}(0, 4)$ 上に $x_{12} \mapsto x_{12}^\lambda, x_{23} \mapsto f^{-1}x_{23}^\lambda f$ で自己準同型を定め、合成積により \widehat{GT} は monoid になる. Grothendieck-Teichmüller 群 \widehat{GT} (by Drinfeld [D]) は \widehat{GT} の可逆元全体のなす群として定義される.

$G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ とすると、 $\hat{K}(0, 4)$ を $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 - \{0, 1, \infty\})$ と同一視する際に、Deligne の tangential base point ‘ $\vec{01}$ ’ を基点として用いる事で自然な単射準同型 $G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \widehat{GT}$ が生ずることが知られている. (Belyi, Drinfeld, Ihara [I]).

[LS2] において、勝手な元 $(\lambda, f) \in \widehat{GT}$ にたいして一意的に $g \in \hat{K}(0, 4)$ が存在して $f = \theta(g)^{-1}g$ が成り立つことが知られている. ここで θ は $\hat{K}(0, 4)$ の上の x_{12} と x_{23} を交換する自己同型である. [N1-2] の結果に基づいて Grothendieck-Teichmüller 群の “new version” を定義するのに適当なつぎの 2 条件を見いだすことができる.

Definition 2. σ_i ($1 \leq i \leq 4$) を $K(0, 5)$ の生成元とし、 Π を \widehat{GT} の部分群で各元 (λ, f) がつぎの条件 (III)', (IV) を満たす最大のものとする.

(III') $g(x_{45}, x_{51})f(x_{12}, x_{23})f(x_{34}, x_{45}) = f(\sigma_1\sigma_3, \sigma_1^2)$;

(IV) $f(\sigma_1, \sigma_2^4) = \sigma_2^{8\rho_2(f)} f(\sigma_1^2, \sigma_2^2) \sigma_1^{4\rho_2(f)} (\sigma_1\sigma_2)^{-6\rho_2(f)}$,

ここで $\rho_2(f) \in \hat{\mathbb{Z}}$ はアーベル化 \hat{F}_2^{ab} における等式 $g(x, y) \equiv (xy)^{\rho_2(f)}$ で定義されるコサイクルとする.

関係式 (III') はそれが \widehat{GT} の定義に現れる (III) をつぎのように含意するためにこのように名付けられた。実際、自己同型 $\eta \in \text{Aut} \widehat{M}(0,5)$ を $\sigma_1 \mapsto \sigma_3, \sigma_2 \mapsto \sigma_2, \sigma_3 \mapsto \sigma_1, \sigma_4 \mapsto \sigma_{15}$ で $f(\sigma_1 \sigma_3, \sigma_2^2)$ を固定するように定義するとき (III') の左辺を L と書けば $\eta(L)^{-1}L = 1$ が得られるが、 $\eta(L)^{-1}L$ は丁度 (III) の左辺である。

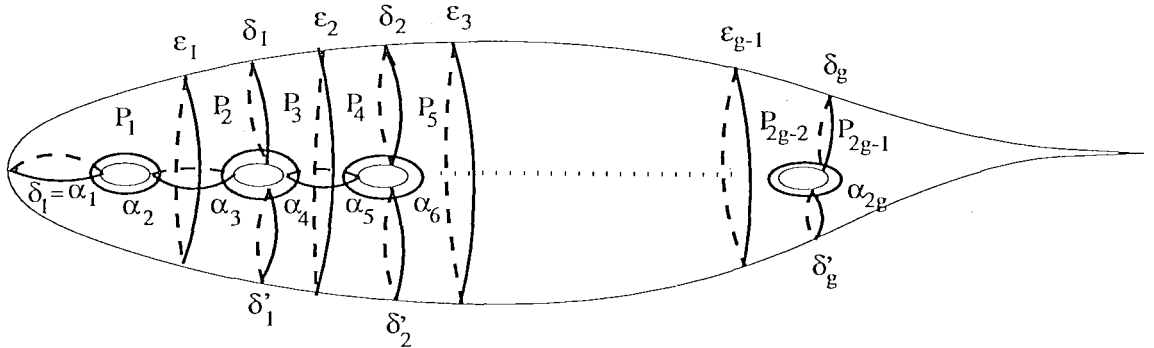
さて種数 g の 1 点マークのリーマン面 $\Sigma_{g,1}$ 上のループ δ_i, δ'_i 及び ϵ_i で与えられるパンツ分解を $\mathcal{P} : \Sigma_{g,1} = \bigcup_{i=1}^{2g-1} P_i$ とする。 $(P_i$ は各々のパンツ)。このとき

Main Theorem. (i) Π は $G_{\mathbb{Q}}$ を含む \widehat{GT} の部分群である。

(ii) 自然な忠実表現 $\widehat{GT} \hookrightarrow \text{Aut}(\widehat{K}(g,1))$ がある。

(iii) (a) この \widehat{GT} の作用は $\widehat{\Gamma}(P_i) \rightarrow \widehat{\Gamma}(\Sigma_{g,1})$ の像を各 $P_i \in \mathcal{P}$ ごとに保つ。

(b) さらに部分群 Π に制限すると $\widehat{\Gamma}(P_i \cup P_j) \rightarrow \widehat{\Gamma}(\Sigma_{g,1})$ の像を各パンツのペア P_i, P_j ごとに保つ。



References

- [D] V.G. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Leningrad Math. J.* **2** (1991), 829-860.
- [GGA] *Geometric Galois Actions*, P.Lochak, L.Schneps eds., London Math. Soc. Lect. Note Ser. **242**, Cambridge University Press, 1997.
- [Gr] A.Grothendieck, Esquisse d'un Programme 1984, in [GGA], 5-47.
- [GTDE] *The Grothendieck theory of Dessins d'Enfants*, L.Schneps ed., London Math. Soc. Lect. Note Ser. **200**, Cambridge University Press, 1994.
- [I] Y.Ihara, On the embedding of $G_{\mathbb{Q}}$ into \widehat{GT} , in [GTDE], 173-200.
- [LS1] P.Lochak, L.Schneps, The Grothendieck-Teichmüller group and automorphisms of braid groups, in [GTDE], 323-358.
- [LS2] P.Lochak, L.Schneps A cohomological interpretation of the Grothendieck-Teichmüller group, *Invent. Math.* **127** (1997), 571-600.
- [LNS] P.Lochak, H.Nakamura, L.Schneps, On a new version of the Grothendieck-Teichmüller group, *C. R. Acad. Sci. Paris* **325** (1997), 11-16.
- [N1] H.Nakamura, Galois representations in the profinite Teichmüller modular groups, in [GGA], 159-173.
- [N2] H.Nakamura, Limits of Galois representations in fundamental groups along maximal degeneration of marked curves I, preprint IAS, 1996.
- [W] B.Wajnryb, A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface, *Israel J. Math.* **45** (1983), 157-174.

GROUPS OF HOMOLOGY COBORDISMS OF SURFACES

KAZUO HABIRO

In this talk, we first introduce the notion of k -surgery equivalence on 3-manifolds. The monoid \mathcal{C}/\sim_{k+1} of homology cobordisms of a surface Σ divided by the $(k+1)$ -surgery equivalence is a *group*. The subgroups $\bar{\mathcal{C}}_k = \mathcal{C}_k/\sim_{k+1}$ of \mathcal{C}/\sim_{k+1} consisting of the $(k+1)$ -surgery equivalence classes of homology cobordisms which are k -surgery equivalent to the trivial cobordism $\Sigma \times I$ forms a graded Lie algebra $\bar{\mathcal{C}} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \bar{\mathcal{C}}_k$. We describe the structure of $\bar{\mathcal{C}}$ in terms of uni-trivalent graphs whose univalent vertices are decorated with elements of $H_1\Sigma$. (We give a set of generators and some relations. We conjecture these relations are complete.)

We may regard elements of the mapping class group \mathcal{M} of the surface Σ as homology cobordisms of Σ via the mapping cylinder construction. We thus have a graded Lie subalgebra $\bar{\mathcal{M}} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \bar{\mathcal{M}}_k$ of $\bar{\mathcal{C}}$. It seems that $\bar{\mathcal{M}}$ is described by uni-trivalent *trees*. The descending filtration on \mathcal{M} given by k -surgery equivalences is very closely related with the lower central series of the Torelli group of Σ .

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO

3次元ハンドル体の写像類群について

廣瀬 進

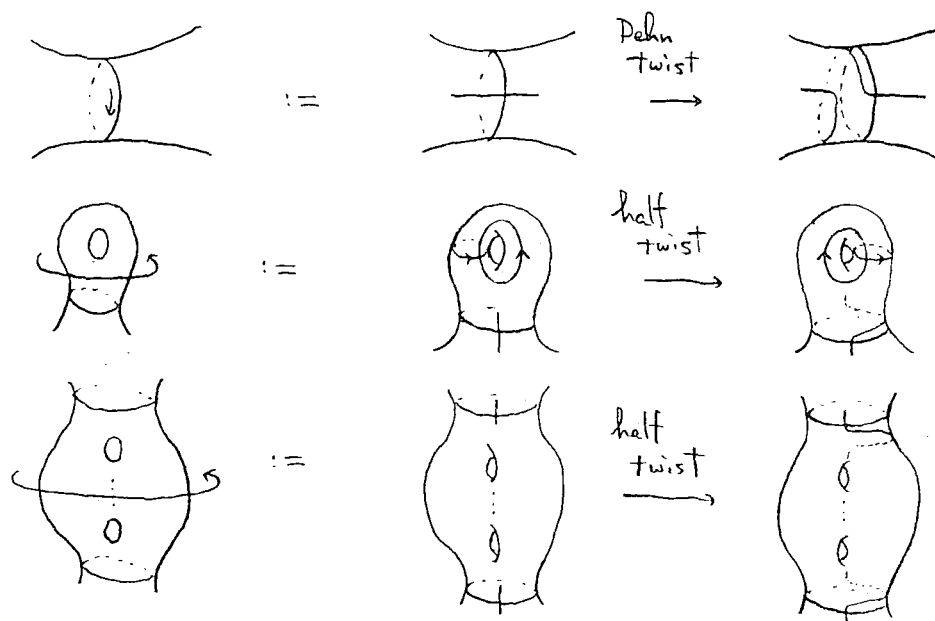
佐賀大学理工学部数理科学科

種数 g の 3 次元ハンドル体とは, 1 個の 3 次元球体に g 個の 1 ハンドル ($D^2 \times [0, 1], D^2 \times \{0, 1\}$) を接合して得られる有向 3 次元多様体の事を言います. 以下では, 略して H_g と書くことにします. H_g の写像類群 (\mathcal{H}_g と書くことにします) は, 3 次元多様体の Heegaard 分解, リーマン面上の写像類群, 自由群上の自己同型写像等と関連した興味深い対象とされます. 今回の講演では, 種数 2 の場合の Kramer (C ではないことに注意) の結果を用いて具体的に \mathcal{H}_2 の表示を求め, 種数が 3 以上の場合に表示を求める方法を説明します.

\mathcal{H}_2 の表示

\mathcal{H}_2 の表示を書くために以下の記号を用います.

記号. 1. 左図は右図に与えられている \mathcal{H}_2 の元を表すことにします:

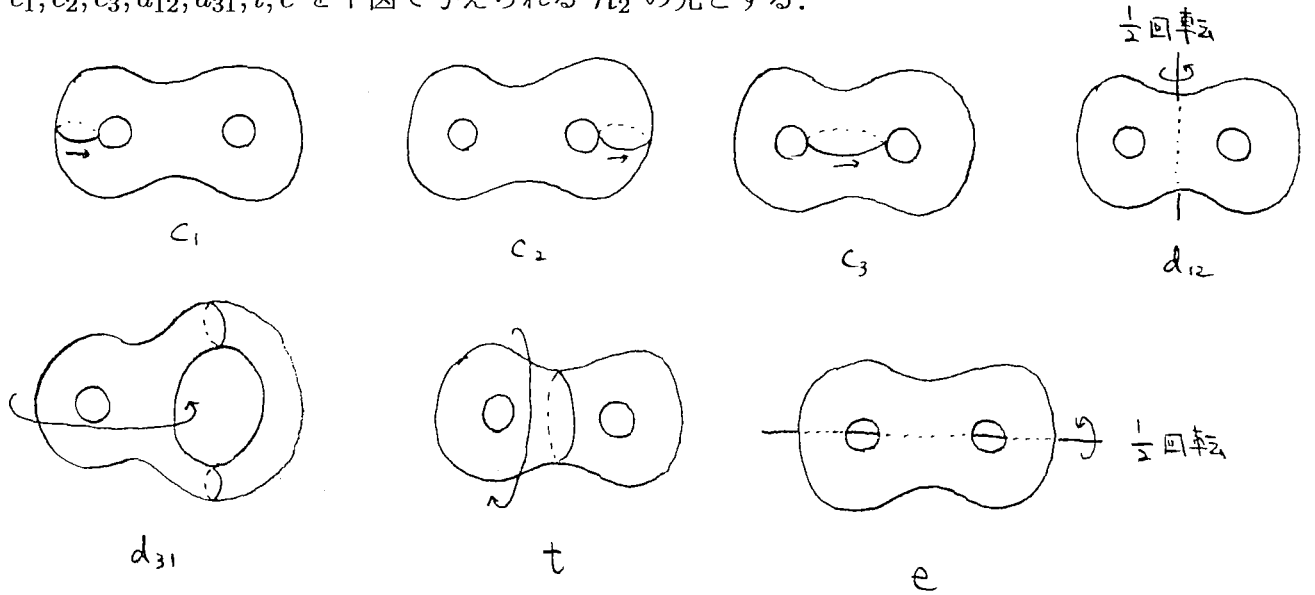


Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -T $\mathcal{E}\mathcal{X}$

2. 記号 \rightleftharpoons は左側に書かれたものと右側に書かれたものが可換であることを意味します。例えば, \mathcal{H}_2 の元 L, M, N に対して, $L \rightleftharpoons M, N$ は, $LM = ML, LN = NL$ を意味します。

\mathcal{H}_2 の表示

$c_1, c_2, c_3, d_{12}, d_{31}, t, e$ を下図で与えられる \mathcal{H}_2 の元とする。



すると, \mathcal{H}_2 は $c_1, c_2, c_3, d_{12}, d_{31}, t, e$ を生成元とし, 次の式を基本関係とする群である:

$$c_1, c_2, c_3 \rightleftharpoons c_1, c_2, c_3$$

$$e \rightleftharpoons c_1, c_2, c_3, d_{12}, d_{31}, t$$

$$t \rightleftharpoons c_1, c_2 \quad t^2 \rightleftharpoons d_{12}$$

$$d_{12}^2 = d_{31}^2 = e^2 = 1, \quad (d_{12}d_{31})^3 = 1, \quad e = t^{-1}d_{12}td_{12}$$

$$d_{12}c_1d_{12} = c_2, \quad d_{31}c_1d_{31} = c_3, \quad d_{12} \rightleftharpoons c_3, \quad d_{31} \rightleftharpoons c_2$$

$$(t^{-1}c_3)^2 = (c_1c_2)^2.$$

以下では, 表示の求め方のアウトラインについて述べます。

3次元ハンドル体の写像類群について

H_2 に proper に埋め込まれた非分離的な本質的 2 円盤の事をメリディアン円盤と呼ぶことにします. D_1, D_2, D_3 を H_2 のメリディアン円盤で互いに isotopic ではなく, さらに互いに交わらないものとし. この時, 和集合 $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ を *marking* と呼び, marking から連結成分を一つ取り除いたものを *cut* と呼びます. 例えば, 今の場合, $D_1 \cup D_2, D_2 \cup D_3$ や $D_3 \cup D_1$ は cut であり, marking $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ に付随する cut と呼ぶことにします. ここで, marking や cut の位相型が一意であることに注意して下さい. Kramer [K] は H_2 に対して, 0-単体を H_2 の marking 及び cut の isotopy class, 1-単体を marking とそれに付随する cut をつなぐものとして構成される 1 次元単体的複体 Kr_2 を考えました. 実は Kr_2 は単連結な一次元単体的複体, すなわち tree になることが示せます ([K] [McC]). \mathcal{H}_2 は Kr_2 に自然に作用していて, さらにその作用は単体的かつ各 1 単体の向きを保つものとなっています. そこで, Kr_2/\mathcal{H}_2 は, 先ほどの注意より, marking と cut に対応する 2 個の 0-単体と, それらをつなぐ 1 個の 1-単体とからなることがわかります. これより, Serre の本 [Se] の Chap. 1 section 5 の結果を用いて, \mathcal{H}_2 は, \mathcal{H}_2 の marking を保つ部分群と cut を保つ部分群との融合積になっていることがわかります. 一方, それらの部分群の表示は Birman [Bi] による議論を用いて求めることができ, 以上から, \mathcal{H}_2 の表示が得られます.

注意. 昨年 12 月の数理研での集会「Analysis of Discrete Groups II」で disk complex (後述) を用いて, \mathcal{H}_2 の表示を求めました [H]. 今回得られた表示と, 以前求めた表示が同値であることは確かめることが出来ます.

g が 3 以上の場合の H_g の表示

H_g の disk complex $\Delta(H_g)$ とは単体的複体で, 各 m -単体が, $m+1$ 個のメリディアン円盤で互いに isotopic でなく交差しないもののなす集合 $\{D_0, D_1, \dots, D_m\}$ の isotopy 類となっているものを言います. この単体的複体 $\Delta(H_g)$ が単連結であることは知られています [J] [McC]. \mathcal{H}_2 の表示を得るのに用いた tree Kr_2 は $\Delta(H_2)$ の重心細分の \mathcal{H}_2 の作用により集合として不変な部分複体となっています. そこで, 先ほどと同様の方法により \mathcal{H}_g の表示を得るためには, $\Delta(H_g)$ の重心細分の \mathcal{H}_g の作用により集合として不変な部

分複体で tree となるものを見いだすことが出来ればよいのですが、現時点（1997年8月18日現在）では見いだせていません．一方， $\Delta(H_g)$ への \mathcal{H}_g の作用から，Brown [Br] の方法により g について帰納的に \mathcal{H}_g の表示を求めることが可能であり，現在，この方法で表示を求めようと試みています．

REFERENCES

- [Bi] J.S. Birman, *Mapping class groups and their rerationships to braid groups*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 213–238.
- [Br] K.S. Brown, *Presentations for groups acting on simply-connected complexes*, Jour. Pure and Appl. Alg. **32** (1984), 1–10.
- [H] S. Hirose, *Generators and relations for the mapping class group of the handlebody of genus 2*, preprint.
- [J] K. Johannson, *Topology and combinatorics of 3-manifolds*, Lecture notes in math. 1599, Springer, 1995.
- [K] R. Kramer, *The twist group of an orientable cube-with-two-handles is not finitely generated*, preprint.
- [McC] D. McCullough, *Virtually geometrically finite mapping class groups of 3-manifolds*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 1–65.
- [Se] J-P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.
- [Su] S. Suzuki, *On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody*, Canad. J. Math. **29** (1977), 111–124.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS FACULTY OF SCIENCE AND ENGINEERING SAGA UNIVERSITY
SAGA, 840 JAPAN
E-mail address: hirose@ms.saga-u.ac.jp

点抜き球面の写像類群と「量子逆元」

松本幸夫

東京大学数理科学研究科

1997.Aug.7

「量子逆元 (quantum inverse)」というのは聞きなれない言葉だと思いますが、点抜き球面の写像類群のなかで共役公式を求めようとする、自然に現れるオペレーション (自由群の内部の) で、通常の逆元をとる操作に高次の非可換性を組み込んだようなものです。それは共役公式を離れても何やら面白そうな対象に思えたので、量子逆元という名前をつけて宣伝しました [0], [1]。

幸い、鎌田聖一氏、葉広和夫氏が興味をもってくださって、当初、分からなかった「量子逆元の代数的計算法を求める」問題が解決しました。この結果は今準備中の共著論文で詳しく述べる予定です [2]。また、吉川克之氏 [6] も興味をもってくださり、すこし遅れて、べつの形の解法を教えてくださいました。池田 徹氏と中川義行氏は量子逆元を計算するコンピュータ・プログラムを組んでくださいました。以上の方々に、この場を借りて感謝いたします。また、今度のシンポジウムにご招待くださった河澄響矢氏に感謝いたします。

量子逆元の「数学的な本性」はいまの段階でもまだはっきり分かった感じがしないのですが、“Rack” [3] による解釈が自然なのではないかと思うようになりましたので、それについて後で述べます。

§1 量子逆元の性質

F_n を n 個の生成元により生成された自由群とします：

$$F_n = \langle y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \rangle.$$

生成元のあいだには、予め決められた線型順序が入っているものとします：

$$y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1}.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 57M05, 57M25, 57R50.

Key words and phrases. 写像類群, 共役公式, 自由群.

最小の生成元 y_0 は特別の役割を果たしますので、特別な記号 x で表します。

次の6つが量子逆元の性質です。ただし、これらの性質だけでは、量子逆元は特徴づけられない(?) と思われます。

1) 量子逆元は F_n からそれ自身への全単射 $I: F_n \rightarrow F_n$ である。(あとで分かるように、じつは crossed anti-homomorphism であり、同時に crossed homomorphism である。

2) I は x による内部自己同型の「平方根」である。すなわち、任意の $W \in F_n$ について、

$$I(I(W)) = x^{-1} W x$$

がなりたつ。

3) I は次の意味で「安定」である。すなわち、 $F_m = \langle z_0, z_1, \dots, z_m \rangle$ をもうひとつの自由群とし、 $h: F_n \rightarrow F_m$ を、

$$h(y_0) = z_0, \text{ かつ}$$

$$h(y_i) = z_k, \quad h(y_j) = z_l, \quad y_i < y_j \quad \text{ならば} \quad z_k < z_l$$

を満たす準同型とすると、次の図式が可換になる：

$$\begin{array}{ccc} F_n & \xrightarrow{I} & F_n \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ F_m & \xrightarrow{I} & F_m \end{array}$$

4) ($x = 1$ とおけば、古典的逆元に一致する。：「量子」逆元の由来。) すなわち、つぎの図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} F_n & \xrightarrow{I} & F_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_n/N(x) & \xrightarrow{\text{inv.}} & F_n/N(x) \end{array}$$

ただし、 $N(x)$ は x で生成される正規部分群である。

5) (「エネルギー保存則」が成り立つ。) すなわち、 $I(W)$ のなかの x の指数の和は W のなかの x の指数の和に等しい。

6) (強い安定性。) F_n の生成元 y_0, y_1, \dots, y_n のうちから、 y_0 でないものをいくつか選んでフィックスしたものを $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}$ とする。そして、これらを全て $= 1$ とおく、という簡約操作を考える。この簡約操作で $W \in F_n$ が $W' \in F_{n'}$ になったとすると、同一の簡約操作で $I(W) \in F_n$ は $I(W') \in F_{n'}$ になる。

点抜き球面の写像類群と「量子逆元」

つぎに、簡単な計算例をあげます。ここでは、簡単のため、 $F_4 = \langle x, y, z, w \rangle$ で考えます。($x < y < z < w$)

$$I(1) = 1$$

$$I(x) = x, I(y) = y^{-1}, I(z) = z^{-1}, I(w) = w^{-1}$$

$$I(x^2) = x^2, I(y^2) = xy^{-1}x^{-1}y^{-1}, I(z^2) = xz^{-1}x^{-1}z^{-1}, \text{これは安定性の例.}$$

$$I(y^m) = x^m(x^{-1}y^{-1})^m, \forall m \in \mathbb{Z}, \text{とくに, } I(y^{-1}) = x^{-1}yx.$$

上の最後の式は $I(I(y)) = x^{-1}yx$ と同じ.

もう少し複雑なものとして

$$I(y^m xz) = x^m(x^{-1}z^{-1}y^{-1}z)^m xz^{-1}$$

$$I(y^m z) = x^m(x^{-1}z^{-1}y^{-1}z)^m z^{-1}$$

があります。これは次の鎌田氏 (Dec. 1996) の公式の例になっています。

$$I(W_1 x^k W_2) = I(W_1 W_2) I(W_2)^{-1} x^k I(W_2).$$

鎌田氏の公式の特別な場合として,

$$I(W_1 x^k) = I(W_1) x^k$$

$$I(x^k W_2) = x^k I(W_2)$$

$$I(W^{-1} x^k W) = I(W)^{-1} x^k I(W)$$

がなりたつ。上の3番目の式は吉川氏から注意されました。

§2 I はどこから出てきたか。

それは $n+2$ 個の点を抜いた球面の写像類群 $M(0, n+2)$ のなかの共役公式を考えることからです。ここで、 n は2以上の自然数です。とくに、種数2のレフシェツ・ファイバー空間との関連から $M(0, 6)$ に興味がありますが、いまは、特に $n+2=6$ の必要はありません。

さて、 $M(0, n+2)$ の標準的生成元として

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+1}$$

があります。球面 S^2 から除く $n+2$ 点を一列に並べ、左から順に

$$p_1, p_2, \dots, p_{n+2}$$

と名前をつけます. ζ_i は, p_i と p_{i+1} を結ぶ線分を, その中点を中心として正の向きに 180° 回転させて p_i と p_{i+1} を入れ替える同相写像: $S^2 - \{n+2 \text{ points}\} \rightarrow S^2 - \{n+2 \text{ points}\}$ によって代表される写像類です.

以下, 通常とは逆に, $M(0, n+2)$ のなかでは写像類は左から右に合成して行くものとします.

$$\begin{aligned} a &= \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{n+1}, \\ b &= \zeta_1^2 \zeta_2 \cdots \zeta_{n+1} \end{aligned}$$

とおくと

$$a^{n+2} = 1, \quad b^{n+1} = 1$$

がなりたちます.

よく知られているように, S^2 上の $n+2$ 本糸のブレイドは $M(0, n+2)$ の元を決めます. Birman の本 [4] の記号で, pure braid A_0 $i+1$ に対応する $M(0, n+2)$ の元を y_i とすると, 次の事実が知られています.

定理 (Gillette and Van Buskirk [5]). y_0, y_1, \dots, y_{n-1} は $M(0, n+2)$ のなかの自由な部分群 F_n を生成する.

さて, まず考えたいのは, $M(0, n+2)$ のなかの元であって, ζ_1 に共役なものの標準形です. 一般に, そのような元 U は $Q^{-1}\zeta_1 Q$ という形 (ここに, $Q \in M(0, n+2)$) に書けますが, この Q は U について一意的には決まらないので, そこが最初の問題です. 先に導入した元 a, b, y_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) を使うと, 標準形の問題は次のように解けます.

定理. $Q^{-1}\zeta_i Q$ は

$$a^k b^l W^{-1} \zeta_1 W b^{-l} a^{-k}$$

の形の標準形で一意的に表される. ここに, W は, y_0, y_1, \dots, y_{n-1} で生成される自由群 F_n の元であって, 左端に y_0 の「べき」を含まないものであり, また a, b は上で定義しておいた $M(0, n+2)$ の元で, 指数 k, l は $0 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq n, k+l \leq n$ の範囲を動くものとする.

証明は [0], [1] に大体書きました. W が左端に y_0 の「べき」を含まないと仮定したのは,

$$y_0 = \zeta_1^2$$

という関係があるため, y_0 と ζ_1 が可換になるからです.

目標の共役公式は, ζ_1 に共役な $M(0, n+2)$ の元が 2 つ, U_1 と U_2 があったとして, それぞれ標準形で表されているとします. このとき,

$$U_2^{-1} U_1 U_2$$

を考えると, これも ζ_1 に共役ですから, また上の定理によって標準形で一意的に表されるはずですが, U_1 と U_2 の標準形から $U_2^{-1} U_1 U_2$ の標準形を計算する公式を

点抜き球面の写像類群と「量子逆元」

求めよというのが、共役公式の問題です。量子逆元は、最も「簡単な」場合、すなわち

$$\begin{aligned} U_1 &= W^{-1}\zeta_1 W \\ U_2 &= \zeta_1 \end{aligned}$$

の場合に現れます。

この場合、 $\zeta_1^{-1}W^{-1}\zeta_1 W\zeta_1$ は、また $W'^{-1}\zeta_1 W'$ の形に書けることが分かりますが、この W に W' を対応させるのが、本質的に量子逆元

$$I: F_n \rightarrow F_n, \quad I(W) = W'$$

です。ただし、 W や W' の左から $y_0 (= x)$ のべきを掛ける不定性は残ってしまうので、人工的に「エネルギー保存則」(性質 5)) を仮定することによってこの不定性を消します。これで一意的に決まった対応 $I: F_n \rightarrow F_n$ が量子逆元です。従って、量子逆元の性質 5) は、 I の性質というよりむしろ、その定義の一部と考えられます。

§3 I の計算法.

初めの頃、筆者のやっていた計算法は「図形的計算法」で、平面上（本当は球面上）に、自由群の元 W を表す曲線を描き、その自己交差のデータから W の量子逆元 $I(W)$ を計算するもので、結構面白くて、沢山計算しました。ただし、自己交差のデータを使って回帰的に計算するもので、大変面倒でした。自己交差の数が 22 個の例を計算したときなどは、一日数時間ずつ数日を要しました。この手計算の部分をコンピュータのプログラムに組んでくれたのが、池田 徹氏と中川義行氏です。

今年の 1 月ごろ、葉広和夫氏と鎌田聖一氏は独立に I の代数的な計算法を発見しました。

彼らの方法の急所は次の公式です。以下、簡単のため、 ζ_1 を ζ と書くことにします。

$$I(W_1 W_2) = I(W_2)(I(W_1))^{(W_2)\zeta}.$$

この式の右辺にヒントを得て、 F_n の F_n への右側作用 B を $B_W(V) := V^{(W)\zeta}$ とおいて定義します。 W が V へ作用しています。

$$B_W(V_1 V_2) = B_W(V_1) B_W(V_2), \quad \text{および} \quad B_{W_1 W_2}(V) = B_{W_2}(B_{W_1}(V))$$

がなりたつので、 $B_W(V)$ を $W = y_i^{\pm 1}$, $V = y_j^{\pm 1}$ の場合の計算しておけば、一般の $B_W(V)$ は計算可能です。実際に計算して、

$$B_{y_i}(y_k) = \begin{cases} y_i x y_i^{-1}, & k = 0 \\ y_k, & 1 \leq k < i \\ y_i x y_i x^{-1} y_i^{-1}, & i = k \\ (y_i x y_i^{-1} x^{-1}) y_k (x y_i x^{-1} y_i^{-1}), & k > i \end{cases}$$

および

$$B_x(y_k) = x^{-1}y_kx$$

が得られます.

こうして, $I: F_n \rightarrow F_n$ は $B: F_n \rightarrow \text{Auto}(F_n)$ という右作用により振じられた crossed anti-homomorphism ということになります:

$$I(W_1W_2) = I(W_2)B_{W_2}(I(W_1)).$$

今年5月に吉川克之氏が葉広・鎌田両氏とは別の幾何学的アイデアに基づいて, 次のような右作用 $C: F_n \rightarrow \text{Auto}(F_n)$ を定義しました:

$$C_{y_i}(y_k) = \begin{cases} y_k, & i = 0 \text{ または } k = 0 \\ y_i^{-1}y_ky_i, & 0 < k < i \\ xy_ix^{-1}, & i = k \neq 0 \\ (xy_i^{-1}x^{-1})y_k(xy_ix^{-1}), & 0 < i < k. \end{cases}$$

右作用 C により I を計算する吉川公式は

$$I(W_1W_2) = C_{W_2}(I(W_1))I(W_2)$$

です. 従って, $I: F_n \rightarrow F_n$ は, C という右作用により振じられた crossed homomorphism とも考えられるわけです.

なお, C と B は次の様に関係しています.

$$C_W(V) = I(W)B_W(V)I(W)^{-1}.$$

また, 吉川氏の C は I と可換です:

$$C_W(I(V)) = I(C_W(V)).$$

さらに, W のなかの x を $x = 1$ とおいて W を簡約して得られる語を W' とすると,

$$C_{W'}(V) = C_W(V)$$

がなりたちます. 従って, 吉川氏の C は, 実際には $F_n/N(x)$ の F_n への右作用を与えています.

§4 Rack による定式化の試み.

Rack という代数系は Fenn と Rourke の論文 [3] で初めて知ったのですが, 過去に多くの人達によって考えられていたようです. 彼らの論文と, そこに引用されている Joyce の論文によると, Kauffman(1991) は Crystal と呼び, Brieskorn(1988) は Automorphic set と呼び, Joyce (1982) は Quandle と呼び, 高崎光久 (1943) は「圭」と呼んでいたそうです. 定義は Rack がもっとも一般的で, あとはその特殊な場合と考えられそうです. しかし, 本質的には皆, 同じもので, どうやら Rack (の特殊な場合) を初めて定義したのは日本人, 高崎光久氏 (Tohoku J. 1943) らしいのですが, 東北数学雑誌の同氏の論文は日本語で書かれているので, ほとんど無視されてしまったようです. Rack theory は「圭論」と訳すのがよいのではないのでしょうか.

点抜き球面の写像類群と「量子逆元」

定義 (Rack, 圭). 空でない集合 X が Rack (圭) であるとは, 任意の $a, b \in X$ について $a * b$ という X の元が定まり, 次の 2 条件を満たすことである.

- (i) $b \in X$ を止めたとき, 対応 $a \mapsto a * b$ は全単射 $X \rightarrow X$ である.
- (ii) 任意の $a, b, c \in X$ について

$$(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$$

がなりたつ.

さて, 次のような Rack X_n を構成しましょう. $n+2$ 点抜き球面 $S^2 - \{n+2 \text{ points}\}$ のなかの相異なる punctures を「両端」とする smoothly embedded curves の isotopy classes の全体を X_n とします. X_n の任意の元 b をとります. b の円板近傍 $D(b)$ のなかで b の両端を入れ替える「 180° 回転」(境界 $\partial D(b)$ では identity であるようなもの) を $\tau(b)$ とすると, $\tau(b) \in M(0, n+2)$ となります. X_n の 2 元 a, b について, a を $\tau(b)$ で写したものを $(a)\tau(b)$ を $a * b$ と書くと, $a * b \in X_n$ となります:

$$a * b := (a)\tau(b).$$

なお, ここで同相写像 $\tau(b)$ を a の右に書いてあるのは, $M(0, n+2)$ のなかの写像は左から右に合成する, という約束によります.

こうして定義した演算 $a * b$ が, Rack の条件 (i), (ii) をみたすことは直ぐに確かめられて, 新しい Rack X_n が得られました. (今年の 4 月に Fenn と Rourke に会ったとき, この X_n のことを話したら, 確かに新しい Rack だと言っていました.)

X_n の元 a について, $\tau(a) \in M(0, n+2)$ は ζ_1 と共役な元になります. 逆に, ζ_1 と共役な $M(0, n+2)$ の元は $\tau(a)$ ($a \in X_n$) の形に書けます.

容易に

$$\tau(a * b) = \tau(b)^{-1} \tau(a) \tau(b)$$

が確かめられるので, $M(0, n+2)$ の共役公式は Rack X_n の (自由群をつかった) 表現と考えられる, と思います.

この辺りのことについては, もう少し考えてみます.

REFERENCES

0. 松本幸夫, 写像類群の共役公式と「量子逆元」, 研究集会報告集「結び目理論と様々な数学との絡み」 (1997, Feb.).
1. Y. Matsumoto, *On quantum inverse in a free group*, Proceedings of the 5-th Korea-Japan School of Knots and Links (1997, to appear).
2. K. Habiro, S. Kamada, and Y. Matsumoto, *to appear*.
3. R. Fenn and C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot and its Ramif. 1 (1992), 343–406.

松本幸夫

4. J.Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Ann. Math. Studies 82, Princeton Univ. Press, 1974.
5. R.Gillet and J.Van Buskirk, *The word problem and consequences for the braid groups and mapping class groups of the 2-sphere* **131** (1968), 277–296.
6. K.Yoshikawa, *Private communication* (1997, May).

郵便番号 1 5 3 : 目黒区駒場 3 − 8 − 1, 東京大学数理科学研究科

Genus one surfaces of section of Anosov flows

皆川宏之（北大理）

平成9年 8月 19日

簡単のために、全ては、orientable category で考えることにする。

3次元閉多様体 M 上の flow $\phi_t: M \rightarrow M$ に対して、compact subset $S \subset M$ が ϕ_t の *surface of section* であるとは、compact surface Σ と immersion $j: \Sigma \rightarrow M$ が存在して、次の3条件を満たすときをいう。

- 1) $j(\Sigma) = S$ で $\partial S = j(\partial\Sigma)$ の各連結成分は、 ϕ_t の closed orbit。
- 2) $j|_{\Sigma - \partial S}$ は $M - \partial S$ への imbedding で flow に横断的。
- 3) 各 orbit は、一様有界時間内に S と交わる。

次の flows は、surface of section を持つことが知られている。

- 1) Transitive Anosov flow ([3])。
- 2) Transitive expansive flow ([2])。

これらについては、 ∂S に沿って適当に手術を施すことにより suspension pseudo-Anosov flow が得られることが知られている ([3]、[2])。そこで、次の問を考えてみる。

問. 全ての transitive Anosov flow は suspension Anosov flow に手術を施すことで位相的に再構成できるか？

これは、次の問題を考えることと同じである。

問. 全ての transitive Anosov flow は、genus one surface of section をもつか？

次の Anosov flow は、genus one surface of section をもつ ([1],[3])。

- 1) 任意の oriented closed Hyperbolic surface 上の geodesic flow。
- 2) cone angles $2\pi/p, 2\pi/q, 2\pi/r$ なる 3つの cone singularities をもつ hyperbolic orbifold $S(p, q, r)$ 上の geodesic flow のうち $(p, q, r) \neq (2, 3, r)(r \geq 7), (2, 4, r)(r \geq 5)$ なるもの ([6])。

この講演では、Fried[3] および 橋口 [6] による genus one surface of section の構成を一般化することにより、任意の $S(p, q, r)(1/p+1/q+1/r < 1)$ を含むさらに多くの compact hyperbolic orbifold 上の geodesic flow が genus one surface of section をもつことを示す。これまでに、幾何学的に構成される surface of section はすべて imbedded surface で境界が偶数個の連結成分からなるものであったが、新たに境界が連結なもの、あるいは imbedded surface ではないものなども幾何学的に構成できることがわかった。また、surface of section と weak stable (unstable) foliation の横断的 PL 構造の関係についても述べてみたい。実際、weak stable foliation の横断的 PL 構造から genus one surface of section の存在が、先に確認できていた例も少なくない。これらの副産物として、[7] で述べられている S^3 の figure eight knot に沿う手術で得られる non-Haken Seifert 多様体のトポロジーを決定することができる。

参考文献

- [1] M.Brunella, On the discrete Godbillon-Vey invariant and Dehn surgery on geodesic flows, Ann. Fac. Sci. de Toulouse, 3, (1994), 335–344.
- [2] M.Brunella, Surfaces of section for expansive flows on three-manifold, J. Math. soc. Japan vol. 47, no. 3, (1995), 491–501.
- [3] D.Fried, Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps, Topology vol. 22, no. 3, (1983), 299–303.
- [4] S.Goodman, Dehn surgery on Anosov flows, Springer Lecture Notes 1007, Springer New York, (1983), 300–307.

- [5] M.Handel and W.Thurston, Anosov flows on new 3-manifolds, *Inv. Math.*, 59, (1980), 95–103.
- [6] N.Hashiguchi, On the geodesic flows on Siefert fibered spaces, preprint,,.
- [7] W.Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton Lecture Notes,,.

写像類群の構造をめぐるいくつかの予想と夢

森田茂之 (東京大学数理科学研究科)

この講演では、写像類群の構造および Riemann 面の moduli 空間のトポロジーについて、下に記す三つの観点からこれまでの諸結果を総括し、それらをもとにいくつかの予想と夢を述べる。これにより、写像類群が数学の多くの分野と関わる驚くほど豊富な構造を持っていることを示したい。しかし、ここに述べることを完全に明らかにするだけでも、今後多くの年月を要するだろうし、またその時にはさらなる未知の世界が待っているに違いない。

(I) 写像類群のコホモロジー

1. 写像類群の連続コホモロジーと安定特性類 (河澄一森田)
2. 写像類群の非安定コホモロジーと Faber 予想 (河澄一森田)
3. Riemann 面の moduli 空間の Witten-Kontsevich サイクルと連続コホモロジー
4. Riemann 面の moduli 空間のホモトピー型
5. Torelli 群の Sp -不変安定コホモロジーに関する予想
6. 写像類群の部分群 K_g の Sp -不変安定コホモロジーに関する予想

(II) 写像類群の Lie 代数の構造

1. 曲面の基本群の Malcev-Lie 代数に働く微分 (derivation) 全体からなる Lie 代数 \mathcal{H} の "重層構造" について; ("内側" から順に) 閉曲面と開曲面の gap (朝田一中村), 曲面の基本群の元による内部微分, Johnson 準同型の像, 絶対 Galois 群の像 (中村), いくつかの新しい障害, Trace 元 (一番 "外側" まで) とこれらの間の関係
2. \mathcal{H} の連続コホモロジー (Kontsevich)
3. 自由群の外部自己同型群の非安定特性類の定義
4. Torelli 群の Malcev-Lie 代数の有限表示 (Hain)

5. Torelli 群のべき零構造と 3 次元多様体の位相不変量 (Casson, Witten, 大槻, Le-村上-大槻, Rozansky-Witten) との関連, これらは [Casson 不変量+Massey 積] を超えるか?
6. 写像類群の CFT (共形場理論) または TQFT 表現や Le-村上-大槻不変量に付随した表現 (村上順) と Johnson 準同型
7. Torelli 群の Magnus 表現と Johnson 準同型; Magnus 表現は忠実ではない?

(III) 写像類群の 2 次特性類と moduli 空間の ” 高次の幾何学 ”

1. 写像類群の 2 次特性類 $d_{2i-1} \in H^{4i-3}(K_g; Q)$ の定義と予想
2. d_1 と Casson 不変量に関連する ” 高次の幾何学 ”
3. Teichmüller 空間あるいは moduli 空間上の種々の symplectic (または Kähler) 幾何学や保型関数とそれらの間の関係
4. Teichmüller 空間の Sullivan の意味での ” 有界幾何学 ” と写像類群の Gromov 有界コホモロジー, とくに $H_b^2(M_g)$ の大きさや安定特性類をあらわす有界コサイクルの存在

種数 2 の写像類群と signature cocycle, η -不変量

森藤 孝之

東京大学数理科学研究科

向きづけられた閉曲面のことをたんに曲面とよぶことにし、その写像類群 \mathcal{M}_g を考えることにします。

Werner Meyer は論文 [Mey] の中で、曲面上の曲面束の符号数 (signature) を表す 2-コサイクル τ の 1 つの具体的な形を Siegel モジュラー群 $\mathrm{Sp}(2g; \mathbb{Z})$ のレベルで与えています。特にファイバーの種数が 1, 2 のときには、曲面束の符号数は常に 0 になることも併せて示しています。このことは、写像類群の古典的な表現 $\rho: \mathcal{M}_g \rightarrow \mathrm{Sp}(2g; \mathbb{Z})$ により $[\tau]$ を引き戻して \mathcal{M}_g のコホモロジー類と見做したとき、その位数が $g = 1, 2$ のときには有限になる (具体的には各々 3, 5) ということから従います。また種数が 1 の場合には、Meyer は更に一步進んで signature cocycle を $SL(2; \mathbb{Z})$ の rational 1-cochain の境界として表示する明白な公式も与えています (この周辺の歴史については [A], [KM], [S] 等を御覧下さい)。

そこで種数が 2 の場合にも同様の問が考えられますが、ここではそれに向けてのいくつかの準備を試みてみます。

一方、曲面の写像類は (i) 周期的、(ii) 可約、(iii) 擬アノゾフのいずれかに分類されることが知られていますが、容易にわかるように (i), (ii) には共通部分があります。実際、周期的写像類の可約性の特徴づけに関する結果がこれまでにいくつか得られています (例えば [G], [K], [Mo1], [W] 等を参照して下さい)。特に、曲面の種数が 2 の場合には写像トラスを経由することにより、可約性が η -不変量にも反映されることがわかります。もう少し正確に述べると、「種数 2 の周期的写像類が可約である必要十分条件は対応して定まる写像トラスの η -不変量が消えることである」となります ([Mo2])。この主張は、Broughton ([B]) による種数 2 の曲面上の有限群作用の分類、及び Gilman ([G]) の結果を用いて具体的な計算から従います。

REFERENCES

- [A] M. F. Atiyah, *The logarithm of the Dedekind η -function*, Math. Ann. **278** (1987), 335–380.
- [B] S. A. Broughton, *Classifying finite group actions on surfaces of low genus*, J. Pure Appl. Algebra **69** (1990), 233–270.
- [G] J. Gilman, *Structures of elliptic irreducible subgroups of the modular group*, Proc. London Math. Soc. (3) **47** (1983), 27–42.
- [K] Y. Kasahara, *Reducibility and orders of periodic automorphisms of surfaces*, Osaka J. Math. **28** (1991), 985–997.
- [KM] R. Kirby and P. Melvin, *Dedekind sums, μ -invariants and the signature cocycle*, Math. Ann. **299** (1994), 231–267.
- [Mey] W. Meyer, *Die Signatur von Flächenbündeln*, Math. Ann. **201** (1973), 239–264.
- [Mo1] T. Morifuji, *A note on the reducibility of automorphisms of Klein curve and the η -invariant of mapping tori*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear)
- [Mo2] T. Morifuji, *On the reducibility and the η -invariant of periodic automorphisms of genus 2 surface*, J. Knot Theory and its Ramifications. (to appear)
- [S] R. Sczech, *Dedekind sums and signatures of intersection forms*, Math. Ann. **299** (1994), 269–274.
- [W] S. Wang, *Essential invariant circles of surface automorphisms of finite order*, Lecture Notes in Math., **1369** (1989), 275–285.

曲面束の指数と写像類群の中心拡大

森吉仁志 北海道大学大学院理学研究科

本講演では写像類群の中心拡大に対する幾何学的考察、とくに写像類群の2次元コホモロジー群の生成元に対応する中心拡大と曲面束の指数との関連について述べる。

最初に閉リーマン面 Σ をとり、その写像類群を G で表す。まず G と、基点 $*$ $\in S^1$ 上のファイバー Σ_* と Σ との同一視をもった S^1 上の Σ 束の同型類全体の集合との間には、 E に、 S^1 に沿う E の大域ホロノミー ($\in G$) を対応させることで、全単射写像が存在することに注意する。以下では大域ホロノミーが $g \in G$ となる S^1 上の曲面束の同型類を単に $E(g)$ と表すことにする。いま

$$\mathcal{C} = \{(W, g) : W \text{ はコンパクト有向4次元多様体、} \partial W = E(g)\}$$

とにおいて、 \mathcal{C} 上に次の同値関係をいれる：

$$(W, g) \sim (W', g') \Leftrightarrow g = g' \text{ かつ } \text{sign}(W \cup_{E(g)} (-W')) = 0.$$

ここで sign は4次元閉多様体の指数を表す。そして同値類の集合 $\Gamma = \mathcal{C} / \sim$ 上に次の積

$$(W, g) \cdot (W', g') = (W \#_{\Sigma_*} W', gg')$$

(ただし $W \#_{\Sigma_*} W'$ はファイバー Σ_* に沿う連結和を表す) を定めて Γ を群とみなす。

明らかに

$$\pi: \Gamma \rightarrow G \quad \pi(W, g) = g$$

は群の全射準同型を与える。さらにもう少し小さなクラスをも定義しておく。

$$\mathcal{C}_o = \{(W, g) : W \in \mathcal{C} \text{ は境界付曲面上の } \Sigma \text{ 束の構造をもち、} \partial W = E(g)\}$$

とおき、上と同じ同値関係を用いて $\Gamma_o = \mathcal{C}_o / \sim$ とおく。再び同じ方法で Γ_o 上に積が定まる。実際 Γ_o は自然に Γ の部分群になっている。

Theorem. 1) このとき G の 2 つの中心拡大に関する次の可換図式:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Gamma & \xrightarrow{\pi} & G \longrightarrow 1 \\ & & \uparrow \times 4 & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Gamma_o & \xrightarrow{\pi} & G \longrightarrow 1 \end{array}$$

が存在する。

2) 閉リーマン面 Σ の種数が十分大きいとき、中心拡大 Γ_o は $H^2(G; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を与える。このとき e_γ で中心拡大 γ のオイラー類を表すことにするならば、

$$e_\Gamma = 4e_{\Gamma_o}$$

が成り立つ。

註) i) 写像類群の完全性から 2) の主張における π の全射性が従う。

ii) 曲面上の曲面束の指数は常に 4 の倍数であることから、中心における \mathbb{Z} 間の写像が 4 倍になる。

REFERENCES

1. M. Atiyah, *On framings of 3-manifolds*, Topology, 29 (1990), 1–7.
2. J. Barge and E. Ghys *Cocycles d'Euler et de Maslov*, Math. Ann. 294 (1992), 235–265.
3. S. Morita, *Casson invariant, signature defect of framed manifolds and the secondary characteristic classes of surface bundles*, preprint.